

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY



Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

BINDING LIST JUL 2 1924

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie},
56474 Quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME QUARANTE-QUATRIÈME. — ANNÉE 1916.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

A LA SORBONNE.

—
1916

180099
8/5/22

QA

I

S59

t44

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

" SUR L'EXISTENCE DES FONCTIONS IMPLICITES :

PAR MM. E.-R. HEDRICK ET W.-D.-A. WESTFALL ⁽¹⁾.

1. *Introduction.* — Les théorèmes usuels ⁽²⁾ sur les fonctions implicites paraissent plus restrictifs qu'ils ne doivent l'être, parce qu'on suppose habituellement l'existence de certaines dérivées.

Nous nous proposons de démontrer qu'on peut énoncer les hypothèses sous une forme nouvelle, où l'on ne suppose l'existence d'aucune dérivée. Dans le cas d'une équation à une inconnue, ce procédé ne présente pas de difficulté. Aussi nous ne donnerons les détails de la démonstration que dans le cas de plusieurs équations à plusieurs inconnues.

Il est à remarquer que les énoncés habituels des théorèmes d'existence résultent de ceux de ce travail, si les hypothèses qui figurent dans ces énoncés, y compris l'existence de certaines dérivées, sont satisfaites. D'ailleurs la démonstration n'est guère plus difficile dans le cas général traité ici.

2. *Cas d'une seule équation entre deux ou plusieurs variables.* — Dans le cas d'une seule équation donnant la valeur d'une fonction inconnue, on peut donner plusieurs formes aux hypothèses; nous en donnerons deux seulement. Nous supposerons qu'il y a une seule variable indépendante, mais les extensions au

⁽¹⁾ Lu à la séance d'été de The American Mathematical Society, août 1913.

⁽²⁾ Voir, par exemple, E. GOURSAT, *Bulletin*, t. XXI, 1903; *Cours d'Analyse*, t. I, 2^e édition.

cas de plusieurs variables indépendantes sont presque évidentes. D'ailleurs ces extensions sont très importantes pour la suite, car on les emploiera fréquemment dans les autres démonstrations ⁽¹⁾.

THÉORÈME I. — Soit $f(x, y)$ une fonction des deux variables réelles x et y , définie dans le domaine R

$$[|x - x_0| < h, |y - y_0| < h]$$

autour du point (x_0, y_0) , et satisfaisant aux conditions suivantes : 1° elle est une fonction continue de x en tout point (x_0, y) de R sur la ligne $x = x_0$; 2° elle est une fonction continue de y en tout point de R ; 3° le quotient

$$Q_y^0 = \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

est défini (c'est-à-dire de même signe et différent de zéro) tant que l'on a $0 < |y - y_0| < h$. Il existe alors un nombre positif r_1 , et au moins une fonction $\varphi(x)$, définie dans l'intervalle $(x_0 - r_1, x_0 + r_1)$, continue au point $x = x_0$, et telle que l'on ait

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad f[x, \varphi(x)] = f(x_0, y_0),$$

tant que l'on a $|x - x_0| < r_1$.

En effet, supposons que Q_y^0 reste toujours positif. Alors, si l'on choisit une quantité positive δ plus petite que h , il existe une autre quantité positive θ , telle que l'on ait

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0 + \delta) &> f(x_0, y_0) + \theta, \\ f(x_0, y_0 - \delta) &< f(x_0, y_0) - \theta. \end{aligned}$$

(1) Ainsi dans le théorème I, on peut remplacer la variable indépendante x par un système de n variables indépendantes $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Le théorème subsiste pourvu que l'on fasse les hypothèses correspondantes sur $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$. De plus, une fonction $f(x_1, \dots, x_n, y)$ peut satisfaire aux conditions du théorème I pour quelques-unes des variables x et aux conditions du théorème II pour les autres.

On peut, dans le théorème I, remplacer l'hypothèse faite sur Q par l'hypothèse qu'il y a dans le voisinage de y_0 deux valeurs de y , y_1 et y_2 , pour lesquelles on a

$$[f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)][f(x_0, y_2) - f(x_0, y_0)] < 0.$$

Mais $f(x, y)$ est une fonction continue de x pour $x = x_0$; il existe alors un nombre positif ζ tel que l'on ait

$$f(x, y_0 + \delta) > f(x_0, y_0) > f(x, y_0 - \delta)$$

pour $|x - x_0| < \zeta$, et puisque $f(x, y)$ est une fonction continue de y , il existe au moins une valeur de y comprise entre $y_0 - \delta$ et $y_0 + \delta$ pour laquelle on aura

$$(1) \quad f(x, y) = f(x_0, y_0), \quad |x - x_0| < \zeta, \quad |y - y_0| < \delta.$$

Il est ainsi démontré qu'il existe au moins une solution y de l'équation (1) pour tout choix de δ moindre que h , x vérifiant la condition $|x - x_0| < \zeta$. Pour vérifier qu'il existe une solution continue au point $x = x_0$, choisissons une suite décroissante de valeurs de δ : $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ ayant zéro pour limite. Soient $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n, \dots$, les valeurs correspondantes de ζ , et soient $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$ une suite quelconque (s'il y en a plusieurs) de fonctions correspondantes de x satisfaisant à l'équation (1). La fonction $\Phi(x)$ définie par les équations

$$\Phi(x_0) = y_0, \quad \Phi(x) = y_i(x), \quad \text{pour} \quad \zeta_{i-1} < |x - x_0| \leq \zeta_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

est alors une solution de l'équation (1) pour chaque valeur de x de l'intervalle $|x - x_0| < \zeta_1 < \eta$, et cette solution est évidemment continue pour $x = x_0$.

Une conséquence directe du théorème I est le corollaire suivant, qui est assez intéressant par lui-même pour justifier son énoncé.

COROLLAIRE I. — Soit $f(x, y)$ une fonction continue de x et de y dans le voisinage de x_0, y_0 . Supposons que les p premières dérivées partielles de f par rapport à y existent et soient elles-mêmes des fonctions continues de y pour $x = x_0, |y - y_0| < h$, et que la $p^{\text{ième}}$ dérivée soit la première qui n'est pas nulle au point (x_0, y_0) . Si p est impair, il existe dans tout intervalle suffisamment petit autour de $x = x_0$ une solution $y = \Phi(x)$ de l'équation $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ qui est continue au point $x = x_0$, et qui est égale à y_0 pour $x = x_0$.

En effet, le théorème des accroissements finis montre que

l'on a

$$Q_{y_0}^{(0)} = \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \frac{(y - y_0)^{p-1}}{p!} f^{(p)}[x_0, y_0 + \theta(y - y_0)]$$

($0 < \theta < 1$),

et ce quotient est évidemment défini, si p est impair, pour des valeurs assez petites de $y - y_0$, puisque $f_{(x_0, y_0)}^{(p)}$ est continue en y et n'est pas nulle pour $y = y_0$.

Un cas assez important et déjà connu du théorème est le suivant :

COROLLAIRE II. — Soit $f(y)$ une fonction continue et monotone (croissante ou décroissante) de y au voisinage de $y = y_0$; il existe alors un nombre positif τ_1 et une fonction $y = \Phi(x)$, et une seule, continue pour $x = x_0$, et satisfaisant aux conditions

$$x = f[\Phi(x)], \quad \Phi(x_0) = y_0 \quad \text{pour} \quad |x - x_0| < \tau_1.$$

Pour démontrer que la solution est *unique*, comme il est dit dans l'énoncé ci-dessus, il est nécessaire de modifier légèrement les conditions du théorème I. Voici une autre forme de ce théorème, où l'on peut dire que la solution est déterminée d'une façon unique par des conditions très générales.

THÉORÈME II. — Soit $f(x, y)$ une fonction continue de x et de y dans le domaine R ; si le quotient

$$Q_y = \frac{f(x, \bar{y}) - f(x, y)}{\bar{y} - y}$$

est défini pour tous les couples de points distincts (x, y) , $(x, \bar{y})$ de R , il existe un nombre positif τ_1 et une fonction unique $y = \Phi(x)$, définie dans l'intervalle $|x - x_0| < \tau_1$, pour laquelle on a

$$\Phi(x_0) = y_0, \quad f[x, \Phi(x)] = f[x_0, \Phi(x_0)], \quad |x - x_0| < \tau_1,$$

et cette solution $\varphi(x)$ est continue pour toute valeur de x telle que l'on ait $|x - x_0| < \tau_1$.

Il résulte du théorème I qu'il existe au moins une solution $y = \Phi_1(x)$ qui est continue pour $x = x_0$. S'il y en avait une autre $y = \Phi_2(x)$, il est évident que le quotient Q_y serait nul pour

au moins deux couples de points de R. Ainsi la solution doit être unique. De plus, cette solution est certainement continue en chaque point de l'intervalle, parce que les conditions du théorème I sont satisfaites en chaque point dont les coordonnées satisfont à l'équation $y = \Phi(x)$.

3. *Cas de deux équations à trois ou un plus grand nombre de variables.* — Pour le cas de deux équations, nous énoncerons seulement l'analogie du théorème II.

THÉORÈME III. — Soient $f_1(x, y_1, y_2)$ et $f_2(x, y_1, y_2)$ deux fonctions des trois variables x, y_1, y_2 , définies et continues dans le domaine R

$$[|x - x_0| < h, |y_1 - y_{10}| < h, |y_2 - y_{20}| < h],$$

autour du point fixe x_0, y_{10}, y_{20} . Supposons que, pour un choix convenable de l'ordre des fonctions f_1 et f_2 , et des deux variables y_1 et y_2 , le déterminant

$$j = \begin{vmatrix} \frac{f_1(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2) - f_1(x, y_1, \bar{y}_2)}{\bar{y}_1 - y_1} & \frac{f_1(x, y_1, \bar{y}_2) - f_1(x, y_1, y_2)}{\bar{y}_2 - y_2} \\ \frac{f_2(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2) - f_2(x, y_1, \bar{y}_2)}{\bar{y}_1 - y_1} & \frac{f_2(x, y_1, \bar{y}_2) - f_2(x, y_1, y_2)}{\bar{y}_2 - y_2} \end{vmatrix}$$

ainsi que les éléments de la diagonale principale, soient définis pour tous les points $(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$, $(x, y_1, \bar{y}_2)$, (x, y_1, y_2) , de R pour lesquels j existe. Alors il existe un nombre positif η et un système unique de deux fonctions $y_1 = \Phi_1(x)$, $y_2 = \Phi_2(x)$, définies si l'on a $|x - x_0| < \eta$, pour lesquelles on a

$$(2) \quad \begin{cases} y_{10} = \Phi_1(x_0), & f_1[x, \Phi_1(x), \Phi_2(x)] = f_1(x_0, y_{10}, y_{20}), \\ y_{20} = \Phi_2(x_0), & f_2[x, \Phi_1(x), \Phi_2(x)] = f_2(x_0, y_{10}, y_{20}), \end{cases}$$

et chacune des fonctions Φ_1, Φ_2 est continue pour toute valeur de x de l'intervalle $|x - x_0| < \eta$.

En effet, puisque par hypothèse le dernier élément de la deuxième ligne du déterminant j est défini, il résulte du théorème (voir la note du paragraphe 2) qu'il existe un nombre positif η_1 et une fonction continue $y_2 = \omega(x, y_1)$ (et une seule), définie dans

le domaine $|x - x_0| < r_1$, $|y_1 - y_{10}| < r_1$, telle que l'on a

$$(3) \quad y_{20} = \omega(x_0, y_{10}), \quad f_2[x, y_1, \omega(x, y_1)] = f_2(x_0, y_{10}, y_{20}).$$

Si l'on remplace dans la fonction $f_1(x, y_1, y_2)$ la variable y_2 par cette fonction $\omega(x, y_1)$, on obtient la nouvelle fonction

$$\tilde{f}(x, y_1) = f_1[x, y_1, \omega(x, y_1)],$$

qui est continue si l'on a $|x - x_0| < r_1$, $|y_1 - y_{10}| < r_1$, et le quotient

$$Q_{y_1}(\tilde{f}) = \frac{\tilde{f}(x, \bar{y}_1) - \tilde{f}(x, y_1)}{\bar{y}_1 - y_1}$$

calculé pour cette nouvelle fonction est défini. Nous avons en effet ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} Q_{y_1}(\tilde{f}) &= \frac{f_1[x, \bar{y}_1, \omega(x, \bar{y}_1)] - f_1[x, y_1, \omega(x, y_1)]}{\bar{y}_1 - y_1} \\ &= \frac{f_1[x, \bar{y}_1, \omega(x, \bar{y}_1)] - f_1[x, y_1, \omega(x, \bar{y}_1)]}{\bar{y}_1 - y_1} \\ &\quad + \frac{f_1[x, \bar{y}_1, \omega(x, \bar{y}_1)] - f_1[x, y_1, \omega(x, y_1)]}{\omega(x, \bar{y}_1) - \omega(x, y_1)} \\ &\quad \times \frac{\omega(x, \bar{y}_1) - \omega(x, y_1)}{\bar{y}_1 - y_1}; \end{aligned}$$

d'après la formule (3), on a aussi

$$\begin{aligned} &\frac{f_2[x, \bar{y}_1, \omega(x, \bar{y}_1)] - f_2[x, y_1, \omega(x, \bar{y}_1)]}{\bar{y}_1 - y_1} \\ &+ \frac{f_2[x, y_1, \omega(x, \bar{y}_1)] - f_2[x, y_1, \omega(x, y_1)]}{\omega(x, \bar{y}_1) - \omega(x, y_1)} \frac{\omega(x, \bar{y}_1) - \omega(x, y_1)}{\bar{y}_2 - y_1} = 0. \end{aligned}$$

En désignant $\omega(x, \bar{y}_1)$ par $\bar{y}_2$, il est évident que nous aurons

$$j = Q_{y_1}(\tilde{f}) \times E_{22},$$

E_{22} désignant le dernier élément de la seconde ligne de j . Mais j

(1) S'il y a deux valeurs de y , y_1 et $\bar{y}_1$ pour lesquelles $\omega(x, y_1) = \omega(x, \bar{y}_1)$ les démonstrations suivantes ne s'appliquent pas. Mais, dans ce cas, il est évident que $Q_y = E_{11}$ est défini.

et E_{22} sont tous les deux définis par hypothèse. Il en résulte que $Q_{y_1}(\bar{x})$ est lui-même défini, pour tous les couples de points distincts $(x, \bar{y}_1)$, (x, y_1) pour lesquels on a

$$|x - x_0| < \tau_1, \quad |y_1 - y_{10}| < \tau_1.$$

D'après le théorème II, il existe un nombre positif $\tau_1 < \zeta$ et une fonction continue $y_1 = \Phi_1(x)$ (et une seule), telle que l'on ait

$$y_{10} = \Phi_1(x_0), \quad F[x, \Phi_1(x)] = F(x_0, y_{10});$$

cette fonction est continue dans l'intervalle $|x - x_0| < \tau_1$, et vérifie la condition $|y_1 - y_{10}| < \tau_1$ dans cet intervalle. Si nous posons

$$y_2 = \omega[x, \Phi_1(x)] = \Phi_2(x),$$

les deux fonctions φ_1 et φ_2 satisfont aux équations (2), et elles sont des fonctions continues définies pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $|x - x_0| < \tau_1$.

Ce système de solutions est unique dans le domaine R. Supposons en effet que pour une valeur particulière de x telle que l'on ait $|x - x_0| < \tau_1$, il existe un système de valeurs $\bar{y}_1, \bar{y}_2$, différent du système $y_1 = \Phi_1(x), y_2 = \Phi_2(x)$, pour lesquelles on ait aussi

$$f_1(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = f_1(x_0, y_{10}, y_{20}), \quad f_2(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = f_2(x_0, y_{10}, y_{20}).$$

Il en résulterait que j est nul pour les valeurs $y_1, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ elles-mêmes; si l'on avait $\bar{y}_2 = y_2$, j serait nul pour une valeur quelconque de y_2 .

Le théorème III est ainsi établi. On en trouve une application assez importante dans la théorie des transformations ponctuelles du plan.

THÉORÈME IV. — Soient

$$\begin{aligned} u &= f(x, y), & u_0 &= f(x_0, y_0), \\ v &= \varphi(x, y), & v_0 &= \varphi(x_0, y_0), \end{aligned}$$

une transformation ponctuelle bien définie, où les fonctions f et φ sont des fonctions continues dans le domaine R

$$[|x - x_0| < h, |y - y_0| < h]$$

autour du point (x_0, y_0) . On suppose de plus que le déterminant

$$j = \begin{vmatrix} \frac{f(\bar{x}, \bar{y}) - f(x, \bar{y})}{\bar{x} - x} & \frac{f(x, \bar{y}) - f(x, y)}{\bar{y} - y} \\ \frac{\varphi(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi(x, \bar{y})}{\bar{x} - x} & \frac{\varphi(x, \bar{y}) - \varphi(x, y)}{\bar{y} - y} \end{vmatrix},$$

ainsi qu'un élément au moins de chaque ligne et de chaque colonne soit défini pour tous les points $(\bar{x}, \bar{y})$, $(x, \bar{y})$, (x, y) de R pour lesquels j'existe. Il existe alors un nombre positif τ_1 tel que la transformation inverse est déterminée et continue dans le cercle de rayon τ_1 de centre (u_0, v_0) .

C'est en effet un cas particulier du théorème III; les fonctions f et φ pouvant être échangées entre elles, ainsi que les variables x et y , on peut supposer que ce sont les éléments de la diagonale principale qui sont définis.

Remarquons que le déterminant j peut être mis sous la forme

$$j = \begin{vmatrix} f(\bar{x}, \bar{y}) & f(x, \bar{y}) & f(x, y) \\ \varphi(\bar{x}, \bar{y}) & \varphi(x, \bar{y}) & \varphi(x, y) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{x}' & x & x \\ \bar{y}' & \bar{y} & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

d'où l'on déduit que l'on a $j = \frac{A'}{A}$, en désignant par A l'aire du triangle dont les sommets sont (x, y) , $(x, \bar{y})$, $(\bar{x}, \bar{y})$, et par A' l'aire du triangle dont les sommets sont les points correspondants du plan (u, v) . La condition que j soit défini signifie que les aires A et A' doivent toujours être de même signe ou de signes opposés.

Les théorèmes habituels sur la résolution d'un système de deux équations à deux fonctions inconnues se déduisent des théorèmes III et IV, en supposant que les fonctions données ont des dérivées continues par rapport aux inconnues, et que le jacobien est différent de zéro au voisinage d'un point fixe. Prenons par exemple le théorème IV, et supposons que le jacobien

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

les mineurs que l'on obtient en supprimant les i premières lignes et les i premières colonnes ($i = 1, 2, \dots, n$), soient définis pour tout choix des points qui figurent dans l'énoncé, pourvu que ces points soient dans $\mathbb{R}$ et que chaque élément de j existe, il existe un nombre positif τ_i et un système (et un seul) de fonctions $y_i = \varphi_i(x)$, continues dans l'intervalle $|x - x_0| < \tau_i$, pour lesquelles on a

$$(4) \quad \begin{cases} y_{i0} = \Phi_i(x_0), \\ f_i[x, \Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)] = f_i(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}), \\ |y_i - y_{i0}| < h. \end{cases}$$

Ce théorème se réduit au théorème III pour $n = 2$. Nous allons montrer que, si le théorème est vrai pour toutes les valeurs de n inférieures à N , il est encore vrai pour $n = N$.

Les conditions de l'énoncé sont vérifiées pour les $n - 1$ fonctions $f_2, \dots, f_n$. Si l'on suppose le théorème vrai pour un système de $n - 1$ fonctions continues de x et de y dans le domaine $|x - x_0| < \tau_1, |y_1 - y_{10}| < \tau_1$,

$$y_i = \omega_i(x, y_1) \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

qui satisfait aux conditions

$$(5) \quad \begin{cases} y_{i0} = \omega_i(x_0, y_{10}), \\ f_i[x, y_1, \omega_2(x, y_1), \dots, \omega_n(x, y_1)] = f_i(x_0, y_0, \dots, y_{n0}) \\ (i = 2, 3, \dots, n). \end{cases}$$

Remplaçons dans la fonction f_1 les variables $y_2, y_3, \dots, y_n$ par les fonctions ω_i ; nous obtenons ainsi une nouvelle fonction de x et de y_1 :

$$\tilde{f}(x, y_1) = f_1[x, y_1, \omega_2(x, y_1), \omega_3(x, y_1), \dots, \omega_n(x, y_1)].$$

qui est continue dans le domaine défini par les conditions

$$|x - x_0| < \tau_1, \quad |y_1 - y_{10}| < \tau_1.$$

Nous allons montrer que le quotient

$$Q_{y_2}(\tilde{f}) = \frac{\tilde{f}(x, y'_1) - \tilde{f}(x, y_1)}{y'_1 - y_2}$$

est défini. Nous avons en effet

$$Q_{y_2}(\tilde{f}) = \frac{f_1[x, y'_1, \omega_2(x, y'_1), \dots, \omega_n(x, y'_1)] - f_1[x, y_1, \omega_2(x, y_1), \dots, \omega_n(x, y_1)]}{y'_1 - y_1} \\ = \sum_{k=1}^{k=n} b_{1k},$$

où nous avons posé

$$b_{11} = \frac{f_1[x, y'_1, \omega_2(x, y'_1), \dots, \omega_n(x, y'_1)] - f_1[x, y_1, \omega_2(x, y_1), \dots, \omega_n(x, y_1)]}{y'_1 - y_1}$$

et pour $k > 1$,

$$b_{1k} = \frac{\left(\begin{array}{l} f_1[x, y_1, \omega_2(x, y_2), \dots, \omega_{k-1}(x, y_1), \omega_k(x, y'_1), \dots] \\ - f_1[x, y_1, \omega_2(x, y_2), \dots, \omega_k(x, y_2), \omega_{k+1}(x, y'_1), \dots] \end{array} \right)}{\omega_k(x, y'_1) - \omega_k(x, y_1)} \\ \times \frac{\omega_k(x, y'_1) - \omega_k(x, y_1)}{y'_1 - y_1},$$

si $\omega_k(x, y'_1) - \omega_k(x, y_1)$ n'est pas nul, et $b_{1k} = 0$ si ce dénominateur est nul. Puisque les équations (5) sont vérifiées identiquement en x et y_1 , nous avons

$$f_i[x, y'_1, \omega_2(x, y'_1), \dots, \omega_n(x, y'_1)] = f_i[x, y_1, \omega_2(x, y_1), \dots, \omega_n(x, y_1)] \\ (i = 2, 3, \dots, n)$$

ou

$$\sum_{k=1}^n b_{ik} = 0.$$

b_{ik} se déduisant de b_{1k} en remplaçant f_1 par f_i . Si nous choisissons comme il suit les valeurs des y et des $\bar{y}$

$$y_1 = y_1, \quad y'_1 = y'_1, \quad \dots, \\ y_i = \omega_i(x, y_1), \quad y'_i = \omega_i(x, y'_1), \quad \bar{y}_i = \omega_i(x, y'_1) \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

les quantités b_{ik} sont égales aux éléments correspondants de j multipliés par

$$c_k = \frac{\omega_k(x, y'_1) - \omega_k(x, y_1)}{y'_1 - y_1}.$$

Par conséquent, si nous multiplions les éléments de la $k^{\text{ième}}$ colonne de j par c_k et remplaçons la première colonne par la somme de tous ces produits, le premier élément de cette colonne

devient précisément Q_{y_1} , et tous les autres éléments de cette colonne deviennent nuls. Dans cette opération, si l'on a

$$\omega_k(x, y') = \omega_k(x, y),$$

la valeur de y'_k dans la $k^{\text{ième}}$ colonne ne doit pas être remplacée par la valeur correspondante $\omega_k(x, y'_1)$, mais les conclusions restent les mêmes parce que le c_k correspondant est nul. On a alors dans tous les cas

$$A_{11} Q_{y_1}(\tilde{\mathcal{F}}) = j,$$

A_{11} étant le mineur de a_{11} dans j , et les valeurs des y ayant été choisies comme il a été dit plus haut. Puisque j et A_{11} sont définis, par hypothèse, il en est de même de Q_{y_1} ; c'est ce que nous voulions établir. La fonction $\tilde{\mathcal{F}}(x, y_1)$ remplit alors toutes les conditions du théorème II dans le domaine

$$|x - x_0| < r_1, \quad |y_1 - y_{10}| < r_1.$$

Il en résulte qu'il existe un nombre positif r_1 et une fonction $y_1 = \Phi_1(x)$, continue pour $|x - x_0| < r_1$ et telle que l'on ait

$$y_{10} = \Phi_1(x_0), \quad \tilde{\mathcal{F}}[x, \Phi_1(x)] = \tilde{\mathcal{F}}[x_0, \Phi_2(x_0)],$$

c'est-à-dire telle que

$$y_{10} = \Phi_1(x_0),$$

$$f_2[x, \Phi_2(x), \omega_2[x, \Phi_2(x)], \dots, \omega_n[x, \Phi_2(x)]]' = f_2(x_0, y_{20}, \dots, y_{n0}).$$

Remplaçons dans les fonctions $\omega_i(x, y_i)$, la variable y_i par $\varphi_i(x)$; nous obtenons ainsi les $n - 1$ nouvelles fonctions

$$y_i = \Phi_i(x) = \omega_i[x, \Phi_1(x)] \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

qui satisfont évidemment aux équations (4).

Comme dans le cas de deux équations, il est évident aussi dans le cas général que ce système est unique, et que les fonctions Φ_i sont continues. Il faut remarquer aussi que la variable indépendante x peut être, comme plus haut, remplacée par un système de n variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Il est aisé de voir que les énoncés habituels se déduisent du théorème V, comme plus haut pour les théorèmes III et IV, en supposant que les dérivées, limites des éléments de j , existent et sont continues au voisinage du point P_0 , et que le jacobien J est

différent de zéro en ce point. En effet, sous ces conditions, chaque élément de j est égal à l'élément correspondant de J en un point voisin de P_0 , et j est défini dans un certain domaine autour de ce point. Quant aux conditions supplémentaires du théorème V, il est évident qu'il y a au moins un élément de J et le mineur correspondant qui sont différents de zéro au point P_0 ; dans ce mineur, il y a au moins un élément et son mineur qui ne sont pas nuls en ce point, et ainsi de suite. Il en résulte qu'il est possible de ranger les fonctions et les variables dans un ordre tel que tous les éléments de la diagonale principale de J , ainsi que tous les mineurs qu'on obtient en supprimant les i premières lignes et les i premières colonnes sont différents de zéro au point P_0 . Puisque les éléments de J sont continus dans le voisinage, ces éléments et ces mineurs seront aussi différents de zéro dans un certain domaine autour de P_0 . D'après cela, les éléments et les mineurs de correspondants de j seront aussi définis dans un domaine autour de P_0 , et les conditions supplémentaires du théorème V se trouvent remplies ⁽¹⁾.

On a donc démontré tous les théorèmes usuels sur les fonctions implicites sans parler de dérivées, et, pour avoir les énoncés habituels, il suffit d'introduire l'hypothèse de l'existence des dérivées dans les énoncés plus généraux de ce Mémoire. Les auteurs espèrent pouvoir discuter, dans un autre travail, la question de l'existence des solutions dans un domaine plus étendu.

SUR QUELQUES REMARQUES RELATIVES AU PROBLÈME DE PFAFF;

PAR M. E. GOURSAT.

Dans des recherches antérieures sur les invariants intégraux (*Journal de Mathématiques*, 6^e série, t. IV, p. 331-365; *Ibid.*, 7^e série, t. I, p. 241-259), j'ai été conduit à étudier des systèmes d'équations aux différentielles totales, que l'on obtient aussi en

(¹) Il est aisé de voir que J est la limite de j , lorsque les points qui figurent dans j tendent vers P_0 .

annulant la première variation de certaines intégrales. Le plus simple de ces systèmes, celui que l'on obtient en partant d'une intégrale simple, est précisément le système d'équations différentielles bien connu, associé à une forme de Pfaff. En considérant ce système comme définissant une famille d'extrémales, on établit sans aucun calcul qu'il est *complètement intégrable*. Cette propriété peut être prise comme point de départ pour établir l'existence d'une forme canonique pour toute forme de Pfaff. La démonstration est très voisine de celle de M. Darboux, quoique un peu différente par certains détails. Dans un autre travail, je montrerai comment on peut étendre les résultats aux systèmes analogues provenant de la variation d'une intégrale multiple.

On ne trouvera donc dans ce petit article que des résultats classiques. Il m'a paru intéressant de montrer comment ils se rattachent étroitement au calcul des variations, ce qui les rend presque intuitifs pour la plupart.

1. Considérons d'abord le cas de trois variables, et soient $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ trois fonctions continues, ainsi que leurs dérivées, au moins dans un certain domaine. Soit I l'intégrale définie

$$(1) \quad I = \int_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz,$$

prise le long d'une courbe quelconque Γ de ce domaine. La première variation de cette intégrale, quand on déforme infiniment peu le chemin d'intégration, a pour expression, d'après la formule classique (voir, par exemple, J. HADAMARD, *Calcul des variations*, Chap. II ou le calcul du n° 3),

$$\begin{aligned} (2) \quad \delta I = & \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) (\delta y \, dx - \delta x \, dy) \\ & + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) (\delta z \, dy - \delta y \, dz) \\ & + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) (\delta x \, dz - \delta z \, dx) \\ & + P(x_1, y_1, z_1) \Delta x_1 + Q(x_1, y_1, z_1) \Delta y_1 + R(x_1, y_1, z_1) \Delta z_1 \\ & - [P(x_0, y_0, z_0) \Delta x_0 + Q(x_0, y_0, z_0) \Delta y_0 + R(x_0, y_0, z_0) \Delta z_0]. \end{aligned}$$

Dans cette formule, δx , δy , δz désignent les premières variations

des coordonnées d'un point de Γ ; (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) sont les coordonnées des extrémités A et B du chemin d'intégration; $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$ sont les composantes du déplacement infiniment petit de l'origine A quand on passe au chemin infiniment voisin, et $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1$ ont une signification analogue.

Supposons d'abord que l'on fasse varier le chemin d'intégration sans changer les extrémités, les termes en dehors du signe $\int$ disparaissent dans l'expression de δI . Les *extrémales* sont les courbes de l'espace (x, y, z) telles que la première variation δI soit nulle quand on passe de l'une de ces courbes à une courbe quelconque infiniment voisine ayant les mêmes extrémités. Pour que δI soit nul, quelles que soient les variations $\delta x, \delta y, \delta z$ des coordonnées x, y, z le long de Γ , assujetties seulement à s'annuler aux deux extrémités, il faut et il suffit, d'après un lemme fondamental du calcul des variations, que les coefficients de $\delta x, \delta y, \delta z$ sous le signe d'intégration soient nuls en tout point de Γ .

Ces conditions se réduisent à deux, et les éléments du premier ordre des courbes cherchées doivent vérifier les relations

$$(3) \quad \frac{dx}{\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}} = \frac{dy}{\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}} = \frac{dz}{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}.$$

Les extrémales sont donc identiques aux courbes de tourbillon, relatives au vecteur (P, Q, R) .

Cette remarque explique aisément les propriétés d'invariance de ces lignes, relativement à une transformation de coordonnées, et même pour tout changement de variables. Elle explique aussi très facilement *la conservation des lignes de tourbillon*. Soient, dans un fluide en mouvement, $u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)$ les composantes de la vitesse de la molécule fluide qui passe au point (x, y, z) à l'instant t . Si la densité est fonction de la pression, et si le fluide est soumis à des forces dérivant d'un potentiel, on sait que l'intégrale définie

$$\int u dx + v dy + w dz$$

est un invariant intégral *relatif*, c'est-à-dire que la valeur de cette

intégrale, prise à l'instant t_0 le long d'une courbe *fermée* quelconque C_0 , est égale à la valeur de la même intégrale prise à un autre instant t le long de la courbe fermée C , lieu des positions à cet instant t des molécules qui étaient sur C_0 à l'instant t_0 (voir APPELL, *Mécanique rationnelle*, t. III, Chap. XXXV). Cela étant, soit A_0B_0 un arc d'une ligne de tourbillon Γ_0 à l'instant t_0 , et Γ'_0 une autre courbe infiniment voisine de Γ_0 joignant les deux points A_0 et B_0 . Puisque Γ est une extrémale pour l'intégrale

$$\int u(x, y, z, t_0) dx + v(x, y, z, t_0) dy + w(x, y, z, t_0) dz,$$

la différence des deux intégrales

$$\int_{\Gamma'_0} u_0 dx + v_0 dy + w_0 dz - \int_{\Gamma_0} u_0 dx + v_0 dy + w_0 dz$$

est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier, quelle que soit la courbe Γ'_0 infiniment voisine de Γ_0 . A l'instant t , les molécules qui, au temps t_0 , étaient sur l'arc A_0B_0 sont sur une courbe Γ joignant deux points A et B , et les molécules qui étaient sur Γ'_0 sont sur une autre courbe Γ' joignant aussi les points A et B . Puisque l'intégrale

$$\int u dx + v dy + w dz$$

est un invariant intégral pour toute courbe fermée, l'intégrale prise pour la valeur t_0 le long du contour fermé composé des arcs Γ_0 et Γ'_0 décrits en marchant toujours dans le même sens est égale à l'intégrale prise, pour la valeur t , le long du contour formé par les arcs Γ et Γ' en marchant toujours dans le même sens. Cette égalité peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_0} u_0 dx + v_0 dy + w_0 dz - \int_{\Gamma'_0} u_0 dx + v_0 dy + w_0 dz \\ &= \int_{\Gamma} u dx + v dy + w dz - \int_{\Gamma'} u dx + v dy + w dz, \end{aligned}$$

toutes les intégrales étant prises en marchant de A_0 vers B_0 ou de A vers B . Mais le premier membre de cette égalité est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier, quelle que soit la courbe Γ'_0 ; il en est donc de même de la différence $\int_{\Gamma} - \int_{\Gamma'}$, quelle

que soit la courbe Γ' , infiniment voisine de la courbe Γ et joignant les points A et B. Ceci exige que Γ soit une extrémale pour l'intégrale

$$\int u \, dx + v \, dy + w \, dz,$$

c'est-à-dire, nous venons de le voir, une ligne de tourbillon.

2. On peut aussi rattacher très facilement à cette propriété des lignes de tourbillon la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$(4) \quad P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz = 0.$$

Cette équation étant supposée complètement intégrable, c'est-à-dire telle qu'il passe une surface intégrale par chaque point du domaine considéré dans l'espace, soit S une de ces surfaces. Nous allons montrer que *cette surface est un lieu d'extrémales de l'intégrale I*. En effet, pour toute courbe Γ située sur S , on a, par hypothèse,

$$I = \int_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = 0.$$

Or, toute variation infinitésimale de Γ peut se décomposer en une variation tangentielle à S et une variation normale à S . Pour toute variation tangentielle, on a évidemment $\delta I = 0$. Pour qu'une courbe Γ de la surface S soit une extrémale, il suffit donc que la variation δI de l'intégrale, qui correspond à une variation de Γ normale à S , soit nulle. Or, pour une variation normale, on peut poser (les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires)

$$\frac{\delta x}{P} = \frac{\delta y}{Q} = \frac{\delta z}{R} = \lambda \, \delta z,$$

et δI prend la forme

$$\begin{aligned} \delta I = \delta z \int_{\Gamma} \lambda \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) (R \, dy - Q \, dz) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) (P \, dz - R \, dx) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) (Q \, dx - P \, dy) \right]. \end{aligned}$$

La courbe Γ sera donc une extrémale si elle vérifie l'équation

différentielle du premier ordre

$$(5) \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) (R dy - Q dz) + \dots = 0,$$

qui détermine une famille de courbes sur la surface S.

Toute surface intégrale de l'équation (4) est donc un lieu d'extrémales, ou une surface de tourbillons.

En particulier, la courbe de tourbillon qui passe en un point quelconque (x, y, z) doit appartenir à la surface intégrale S qui passe par ce point, puisqu'il ne passe qu'une de ces courbes par un point de l'espace. Cette courbe de tourbillon doit donc être normale au vecteur (P, Q, R) , ce qui donne précisément la condition d'intégrabilité

$$(6) \quad P \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0.$$

Inversement, supposons cette relation vérifiée; elle exprime que l'intégrale I, prise le long d'un segment d'extrémale quelconque, est nulle. Cela posé, soit C_0 une courbe différente d'une extrémale, telle que les coordonnées (x_0, y_0, z_0) d'un point de cette courbe vérifient la relation

$$(7) \quad P(x_0, y_0, z_0) dx_0 + Q(x_0, y_0, z_0) dy_0 + R(x_0, y_0, z_0) dz_0 = 0;$$

ces courbes dépendent d'une fonction arbitraire et il en passe une infinité par chaque point de l'espace. Le lieu des extrémales issues des différents points de C_0 est une surface Σ ; nous allons montrer que *cette surface Σ est une surface intégrale de l'équation (4)*.

Considérons, en effet, un arc d'extrémale variable $M_0 M_1$ de Σ , terminé d'une part à un point M_0 de C_0 , d'autre part à un point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ d'une autre courbe quelconque C_1 de Σ . La valeur de l'intégrale I le long de cet arc $M_0 M_1$ étant nulle, on a aussi $\delta I = 0$, et la formule générale (2) qui donne δI devient, en tenant compte de la condition (7),

$$(8) \quad P(x_1, y_1, z_1) \Delta x_1 + Q(x_1, y_1, z_1) \Delta y_1 + R(x_1, y_1, z_1) \Delta z_1 = 0.$$

Cette relation s'applique à un élément linéaire quelconque de la surface Σ , qui est par suite une surface intégrale (1).

(1) La condition d'intégrabilité (6) exprime que le vecteur (P, Q, R) est, en

3. Considérons maintenant une forme de Pfaff à un nombre quelconque de variables indépendantes

$$(9) \quad \omega = X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n,$$

$X_1 \dots X_n$ étant des fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ces n variables étant regardées comme les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions, les n équations

$$(10) \quad x_i = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où t varie de t_0 à t_1 , représentent dans cet espace une variété à une dimension ou *courbe* Γ , et l'intégrale définie

$$\int_{t_0}^{t_1} X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n,$$

où l'on a remplacé x_i par $f_i(t)$ et dx_i par $f'_i(t) dt$, est encore appelée une intégrale curviligne prise le long de Γ et représentée

chaque point, normal au vecteur tourbillon. L'élégante méthode d'intégration de M. Joseph Bertrand consiste en réalité à obtenir d'abord les surfaces de tourbillons, ce qui exige l'intégration du système (3), puis à déterminer la fonction arbitraire dont dépendent ces surfaces de façon que le plan tangent soit normal au vecteur (P, Q, R) .

Sans rien emprunter au calcul des variations, la formule de Stokes permet de retrouver très simplement la condition d'intégrabilité par une méthode un peu différente de la méthode classique. Les surfaces intégrales (S) de l'équation (4) peuvent être définies en effet comme des surfaces telles que l'intégrale I , prise le long d'une courbe quelconque, *fermée ou non*, située sur S , soit nulle. Au contraire, d'après la formule de Stokes, les surfaces de tourbillon Σ sont telles que l'intégrale, prise le long d'une courbe *fermée* située sur Σ soit toujours nulle. Il est évident, d'après cela, que les surfaces intégrales S sont aussi des surfaces de tourbillon Σ , et par suite le vecteur tourbillon doit être normal en chaque point au vecteur (P, Q, R) .

Réciproquement, cette condition étant satisfaite, prenons, comme dans le texte, une surface de tourbillons Σ engendrée par les lignes de tourbillon issues des différents points d'une courbe C_0 vérifiant la relation (7). Sur cette surface, considérons une courbe fermée Γ , composée d'un arc $A_0 B_0$ de C_0 , de deux arcs $A_0 A$, $B_0 B$ de deux lignes de tourbillon, et d'un autre arc quelconque AB de Σ . Puisque Σ est une surface de tourbillons, l'intégrale I le long de ce contour fermé Γ est nulle. Mais les intégrales le long des arcs $A_0 B_0$, $A_0 A$, $B_0 B$ sont nulles, en vertu des conditions (6) et (7). Il en est donc de même de l'intégrale prise le long de l'arc AB de Σ , quel que soit cet arc, et par suite Σ est une surface intégrale S de l'équation (4).

par

$$I = \int_{\Gamma} X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n.$$

Quand on remplace la courbe Γ par une courbe infiniment voisine, l'intégrale prend un accroissement dont nous allons calculer la partie principale. Il suffit d'appliquer à ce cas particulièrement simple la méthode générale permettant de calculer la première variation d'une intégrale; j'indiquerai rapidement le calcul. Pour cela, imaginons une famille de courbes variant d'une manière continue avec un paramètre α et se réduisant pour $\alpha = 0$ à la courbe Γ . Soient $x_i = f_i(t, \alpha)$ les équations de cette famille de courbes, la fonction $f_i(t, 0)$ étant identique à $f_i(t)$.

Nous supposons que les limites t_0 et t_1 sont elles-mêmes variables avec α , et nous avons à calculer la dérivée $I'(\alpha)$ de l'intégrale définie

$$(10) \quad I(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n X_i(f_1, f_2, \dots, f_n) \frac{\partial f_i}{\partial t} dt,$$

par rapport au paramètre α . La formule classique de différentiation donne

$$\begin{aligned} I'(\alpha) = & \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial X_i}{\partial x_n} \frac{\partial f_n}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial f_i}{\partial t} dt \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n X_i(f_1, f_2, \dots, f_n) \frac{\partial^2 f_i}{\partial \alpha \partial t} dt \\ & + \frac{dt_1}{d\alpha} \left[\sum_{i=1}^n X_i(f_1, f_2, \dots, f_n) \frac{\partial f_i}{\partial t} \right]_{t=t_1} - \frac{dt_0}{d\alpha} \left[\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f_i}{\partial t} \right]_{t=t_0}. \end{aligned}$$

En intégrant par parties la seconde intégrale, on peut la remplacer par

$$\left[\sum_i X_i \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial X_i}{\partial x_n} \frac{\partial f_n}{\partial t} \right) dt.$$

Dans le produit $\delta I = I'(\alpha) \delta \alpha$, on a sous le signe d'intégration

les termes suivants, en posant $\delta x_i = \frac{\partial f_i}{\partial x} \delta x$,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial t} dt \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial X_i}{\partial x_n} \delta x_n \right) \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \delta x_i \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} dt + \dots + \frac{\partial X_i}{\partial x_n} \frac{\partial f_n}{\partial t} dt \right) \\ & = \int_{\Gamma} \sum_i dx_i \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \delta x_k - \int_{\Gamma} \sum_i \delta x_i \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_k, \end{aligned}$$

ou, en permutant les indices i et k dans la seconde intégrale,

$$\int_{\Gamma} \sum_i \sum_k \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) dx_i \delta x_k.$$

Quant aux termes en dehors du signe $\int$, en les réunissant on a l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \delta t_1 \left[\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f_i}{\partial t} \right]_{t=t_1} - \delta t_0 \left[\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f_i}{\partial t} \right]_{t=t_0} \\ & + \delta x \left\{ \left[\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_{t=t_1} - \left[\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_{t=t_0} \right\}. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} & a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \\ (11) \quad & \begin{cases} (\Delta x_i)_0 = \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{t=t_0} \frac{dt_0}{dx} + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right)_{t=t_0} \right] \delta x, \\ (\Delta x_i)_1 = \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{t=t_1} \frac{dt_1}{dx} + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right)_{t=t_1} \right] \delta x; \end{cases} \end{aligned}$$

nous avons pour expression générale de δI

$$\begin{aligned} (12) \quad \delta I &= \int_{\Gamma} \sum_i \sum_k a_{ik} dx_i \delta x_k \\ &+ (X_1 \Delta x_1 + X_2 \Delta x_2 + \dots + X_n \Delta x_n)'_{t_0}^{t_1}. \end{aligned}$$

Remarquons que $(\Delta x_1)_0, (\Delta x_2)_0, \dots, (\Delta x_n)_0$ représentent les composantes du déplacement infiniment petit de l'origine du chemin d'intégration quand on fait varier x de δx , et $(\Delta x_1)_1,$

$(\Delta x_2)_1, \dots, (\Delta x_n)_1$ ont une signification analogue. Si donc on fait varier le chemin d'intégration sans changer les extrémités, le terme tout intégré disparaît, et la formule générale (12) se réduit à

$$(12)' \quad \delta I = \int_{\Gamma} \sum_i \sum_k a_{ik} dx_i \delta x_k.$$

Plaçons-nous dans cette hypothèse. Pour que δI soit nulle, quelles que soient les variations $\delta x_1, \dots, \delta x_n$, le long de Γ , ces variations étant seulement assujetties à s'annuler aux extrémités, il faut et il suffit que les coefficients de $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$ soient nuls en tout point de la courbe Γ , c'est-à-dire que tous les éléments du premier ordre de cette courbe vérifient les relations

$$(13) \quad a_{1i} dx_1 + a_{2i} dx_2 + \dots + a_{ni} dx_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Nous appellerons encore *extrémales* les courbes satisfaisant à ces conditions. Si le déterminant de Pfaff

$$(14) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, ce qui ne peut arriver que si n est pair, les équations (13) sont vérifiées seulement en prenant

$$dx_1 = dx_2 = \dots = dx_n = 0;$$

il n'y a pas d'extrémales. Mais si Δ est nul, il y a une infinité d'extrémales dépendant de constantes arbitraires si les équations (13) se réduisent à $n - 1$ équations distinctes, ou de fonctions arbitraires si elles se réduisent à $n - p$ équations ($p > 1$).

4. L'expression qui figure sous le signe d'intégration dans δI et le système (13) jouent un rôle important dans la théorie du problème de Pfaff. En particulier, c'est sur leur propriété d'invariance qu'est fondée la méthode de M. Darboux (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. VI, 1882, p. 14-36, 49-68). Ces propriétés d'invariance se déduisent d'une façon intuitive de l'interprétation qui précède. Supposons en effet que l'on effectue

un changement de variables

$$(15) \quad x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

la forme linéaire ω se change en une nouvelle forme linéaire de différentielles

$$(16) \quad \omega' = Y_1 dy_1 + \dots + Y_n dy_n,$$

$Y_1, \dots, Y_n$ étant des fonctions de $y_1, y_2, \dots, y_n$, et l'intégrale I , prise le long d'une courbe Γ dans l'espace $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, se change en une intégrale

$$I' = \int_{\Gamma'} Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \dots + Y_n dy_n,$$

prise le long de la courbe Γ' de l'espace $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, qui correspond à la courbe Γ de l'espace $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par la transformation (15). De l'égalité $I = I'$, on déduit que les premières variations sont égales, $\delta I = \delta I'$. Mais on peut calculer $\delta I'$ de deux façons, soit en partant de la formule générale (12)', ce qui donne

$$\delta I' = \int_{\Gamma'} \sum_i \sum_k b_{ik} dy_i \delta y_k, \quad b_{ik} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i},$$

soit en appliquant la formule générale du changement de variables à l'intégrale δI , et remplaçant en même temps la variation δx_i par

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} \delta y_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} \delta y_n.$$

En égalant ces deux expressions de $\delta I'$, on a donc

$$(17) \quad \sum_i \sum_k a_{ik} dx_i \delta x_k = \sum_i \sum_k b_{ik} dy_i \delta y_k.$$

L'expression qui figure sous le signe $\int$ dans δI est précisément la *covariant bilinéaire* de la forme ω .

Il est évident aussi que si la courbe Γ est une extrémale pour l'intégrale I , la courbe Γ' est une extrémale pour I' , et inversement. Le système (13) est donc lui aussi un *système covariant* de la forme ω . Après la transformation (15) il est remplacé par le

système

$$(18) \quad b_{i1} dy_1 + \dots + b_{in} dy_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Considérons encore la forme à $n + 1$ variables

$$x_{n+1}(X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n) + dx_{n+1},$$

où x_{n+1} est une variable auxiliaire. Les équations différentielles des extrémales pour cette nouvelle forme sont

$$(19) \quad \begin{cases} x_{n+1}(a_{i1} dx_1 + \dots + a_{in} dx_n) + X_i dx_{n+1} = 0 & (i = 1, 2, \dots, n), \\ X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n = 0, \end{cases}$$

a_{ik} ayant le même sens que tout à l'heure. Des n premières équations on déduit, en les multipliant respectivement par $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, et ajoutant

$$dx_{n+1}(X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n) = 0.$$

Si $dx_{n+1} = 0$, le système des n premières équations (19) est identique au système (13). Si $dx_{n+1} \neq 0$, la dernière des équations (19) est une conséquence des n premières. Les courbes intégrales du système

$$(20) \quad \frac{a_{i1} dx_1 + \dots + a_{in} dx_n}{X_i} = - \frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où l'on regarde x_{n+1} comme une variable paramétrique, représentent donc les projections, dans l'espace à n dimensions $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, des extrémales de la forme linéaire

$$dx_{n+1} + x_{n+1} \omega.$$

Il est évident, d'après cela, que ces équations forment un système covariant pour toute transformation de la forme

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad x_{n+1} = y_{n+1},$$

où l'on ne change pas la variable auxiliaire x_{n+1} .

Cette propriété du système (20) joue aussi un rôle essentiel dans la méthode de M. Darboux.

§. Nous montrerons encore comment on peut rattacher au calcul

des variations la propriété fondamentale du système (13), *d'être complètement intégrable*.

Il faut d'abord, pour cela, présenter quelques remarques générales sur les systèmes d'équations aux différentielles totales.

Soit

$$(21) \quad A_{i1} dx_1 + \dots + A_{in} dx_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

un système de cette espèce se réduisant à $n - p$ équations distinctes ($p \geq 1$), dont les coefficients A_{ik} sont des fonctions quelconques de $x_1, x_2, \dots, x_n$. Si ces équations forment un système complètement intégrable, le système (21) est équivalent à un système de la forme

$$(22) \quad dF_1 = 0, \quad dF_2 = 0, \quad \dots, \quad dF_{n-p} = 0,$$

$F_1, F_2, \dots, F_{n-p}$ étant $n - p$ fonctions distinctes, et les équations

$$(23) \quad F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \quad \dots, \quad F_{n-p} = C_{n-p}$$

représentent une famille de ∞^{n-p} multiplicités à p dimensions E_p , telles qu'il passe une de ces multiplicités, et une seule en général, par tout point de l'espace $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Nous appellerons ces multiplicités E_p les multiplicités intégrales du système (21).

Quel que soit le système (21), nous appellerons *courbe intégrale* toute multiplicité à une dimension dont tous les éléments infinitésimaux du premier ordre vérifient les relations (21). Une telle multiplicité est définie par un système de n fonctions $x_i = f_i(t)$, continues et admettant une dérivée continue. Nous supposerons même que les dérivées $f'_i(t)$ peuvent avoir un nombre quelconque de discontinuités de première espèce. Si $p = 1$, le système (21) est toujours complètement intégrable, car il se réduit à un système de $n - 1$ équations différentielles ordinaires, et les courbes intégrales se confondent avec les multiplicités intégrales E_p .

Il n'en est plus de même si l'on a $p > 1$. Il y a toujours une infinité de courbes intégrales, dépendant de fonctions arbitraires, puisque l'on peut ajouter aux $n - p$ équations équivalentes au système (21) $p - 1$ relations arbitraires entre les variables x_i . Lorsque le système (21) est complètement intégrable, les coordonnées d'un point de toute courbe intégrale satisfont aux rela-

tions (21) et, par suite, aux relations (23) et inversement. En d'autres termes, *si le système (21) est complètement intégrable, toute courbe intégrale est située sur une multiplicité intégrale, et réciproquement toute courbe située sur une multiplicité intégrale est une courbe intégrale.*

Considérons en particulier l'ensemble des courbes intégrales issues d'un point quelconque M de l'espace; toutes ces courbes sont situées sur la multiplicité intégrale E_p qui passe par M . Par conséquent, *l'ensemble des points de l'espace que l'on peut joindre à un point quelconque M par une courbe intégrale est une multiplicité dont toutes les courbes sont elles-mêmes des courbes intégrales.*

Cette propriété caractérise les systèmes complètement intégrables. Soit en effet $E'(M)$ la multiplicité formée par l'ensemble des points que l'on peut joindre à un point M par une courbe intégrale du système (21), pouvant présenter un nombre quelconque de points anguleux (c'est-à-dire de points où quelques-unes des dérivées sont discontinues). Il est évident que, par tout point M , passe une de ces multiplicités, et que la multiplicité $E'(M')$ correspondant à un point quelconque M' de $E'(M)$ est identique à $E'(M)$. Ces multiplicités $E'(M)$ sont au moins à p dimensions, car les tangentes aux courbes intégrales issues d'un point M , qui sont toutes situées sur $E'(M)$, dépendent de $p - 1$ paramètres arbitraires.

D'autre part, puisque toute courbe de $E'(M)$ est une courbe intégrale, tous les éléments linéaires situés sur cette multiplicité vérifient les relations (21) qui se réduisent à $n - p$ relations distinctes. Ces multiplicités $E'(M)$ sont donc à p dimensions et sont des multiplicités intégrales du système (21), qui est par suite complètement intégrable.

6. Pour démontrer que le système (13) satisfait à la condition précédente, nous établirons d'abord deux lemmes :

Lemme I. — Soient E_2 une multiplicité quelconque à deux dimensions composée d'extrémales, et Γ une courbe fermée quelconque située sur cette multiplicité, et pouvant se réduire à un contour fermé infiniment petit par une déformation continue en

restant constamment sur E_2 ; l'intégrale

$$\int X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n,$$

prise le long de ce contour fermé, est nulle.

On pourrait le déduire facilement de la formule de Stokes généralisée, mais, au point de vue adopté dans ce travail, il est préférable de le déduire de la formule générale qui donne δI . Tout revient à prouver que, si l'on fait subir à une ligne quelconque C de E_2 une déformation infiniment petite dans laquelle cette ligne reste sur E_2 , sans changer les extrémités, on a toujours $\delta I = 0$, quelle que soit cette déformation. Si la courbe C est elle-même une extrémale, la propriété est évidente. Si C n'est pas une extrémale, écrivons la formule qui donne δI

$$\delta I = \int_C \sum_i \left(\sum_k a_{ik} \delta x_k \right) dx_i;$$

puisque la multiplicité E_2 est composée d'extrémales, on peut supposer que dans la déformation infiniment petite de C , chaque point de C décrit un élément d'extrémale, c'est-à-dire que les variations $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$ vérifient les relations

$$\sum_k a_{ik} \delta x_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

qui sont identiques aux relations (13), d'après l'identité $a_{ik} + a_{ki} = 0$. On a donc aussi $\delta I = 0$. C. Q. F. D.

Lemme II. — Soient Γ_0 une extrémale quelconque, et E_2 une multiplicité à deux dimensions formée par une suite continue d'extrémales, différentes de Γ_0 , issues des divers points de Γ_0 (ce qui suppose que ces extrémales dépendent de fonctions arbitraires); toute courbe située sur E_2 est aussi une extrémale.

Considérons en effet un arc de courbe Γ , obtenu en prenant sur chaque extrémale issue d'un point M_0 d'un arc $A_0 B_0$ de Γ_0 un point arbitraire M , et limité aux deux points A et B , situés sur les extrémales qui partent des points A_0 et B_0 . Tout revient à démontrer que Γ est aussi un arc d'extrémale. Pour cela, prenons un arc de

courbe quelconque Γ' , infiniment voisin de Γ et terminé aux mêmes points A et B. Par chaque point de Γ' faisons passer une extrémale de façon que le lieu de ces extrémales soit une multiplicité E'_2 infiniment voisine de E_2 , et de plus que E_2 et E'_2 aient en commun les extrémales AA_0 , BB_0 de E_2 ; ce qu'on peut faire évidemment d'une infinité de manières. Sur cette multiplicité E'_2 , prenons ensuite un arc Γ'_0 , infiniment voisin de Γ_0 , et terminé aux deux points A_0 , B_0 . En appliquant le lemme précédent à chacun des contours fermés $A_0\Gamma_0B_0B\Gamma AA_0$, $A_0\Gamma'_0B_0B\Gamma'AA_0$, qui sont situés l'un et l'autre sur des multiplicités d'extrémales, on en conclut que la différence des deux intégrales $\int_{\Gamma} - \int_{\Gamma'}$, prises de A vers B, est égale à la différence des deux intégrales $\int_{\Gamma_0} - \int_{\Gamma'_0}$, prises de A_0 vers B_0 . Mais cette dernière différence est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier puisque Γ_0 est une extrémale. Il en est donc de même de la différence $\int_{\Gamma} - \int_{\Gamma'}$, quelle que soit la courbe Γ' infiniment voisine de Γ , et par suite Γ est aussi une extrémale.

Ces lemmes étant établis, la proposition que nous avons en vue s'en déduit immédiatement. Nous supposons que les n équations (13) se réduisent à $n - p$ équations distinctes, p étant au moins égal à deux, de façon que par chaque point de l'espace il passe une infinité d'extrémales. Soit, comme au n° 5, $E'(M)$ la multiplicité formée par les extrémales issues du point M, c'est-à-dire le lieu des points que l'on peut joindre à un point M par une extrémale pouvant présenter un nombre quelconque de points anguleux. Il s'agit de montrer que tout arc de courbe AB, situé sur $E'(M)$, est aussi un arc d'extrémale. Or, soit A_0B_0 un arc d'extrémale pris à volonté sur $E'(M)$. D'après la définition même de $E'(M)$, on peut joindre un point quelconque de AB à un point quelconque de A_0B_0 par un arc d'extrémale situé sur $E'(M)$. Si l'on associe ces points deux à deux de façon que ces extrémales forment une suite continue, elles engendrent une multiplicité à deux dimensions, à laquelle on peut appliquer le second lemme, et par suite l'arc AB est aussi, d'après ce lemme, un arc d'extrémale : ce qui prouve la proposition énoncée au début du n° 5.

7. Cette propriété du système (13) est évidente si la forme ω est ramenée à la forme réduite. Nous la démontrerons encore d'une autre façon en nous appuyant uniquement sur la propriété d'invariance du système (13), relativement à tout changement de variables.

Le théorème peut être considéré comme exact, si le déterminant Δ n'est pas nul; dans ce cas, en effet, le système (13) est équivalent au système

$$dx_1 = 0, \quad dx_2 = 0, \quad \dots, \quad dx_n = 0,$$

et l'on peut dire qu'il admet n intégrales premières distinctes

$$x_1 = C_1, \quad x_2 = C_2, \quad \dots, \quad x_n = C_n.$$

Le théorème est vrai aussi si les n équations (13) se réduisent à $n - 1$ équations linéairement distinctes; elles forment alors un système de $n - 1$ équations différentielles ordinaires, et admettent par conséquent $n - 1$ intégrales premières distinctes

$$f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \quad \dots, \quad f_{n-1} = C_{n-1}.$$

Reste à examiner le cas où les n équations (13) se réduisent à p équations linéairement distinctes ($p < n - 1$). Ajoutons à ces p équations $n - p - 1$ équations différentielles

$$A_{i1} dx_1 + \dots + A_{in} dx_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n - p - 1),$$

dont les coefficients sont des fonctions quelconques des variables x_i , choisis de façon à former avec les p équations du système (13) un système de $n - 1$ équations différentielles distinctes. L'intégration de ce système nous fera connaître une famille de courbes extrémales dépendant de $n - 1$ constantes arbitraires. Soient

$$f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \quad \dots, \quad f_{n-1} = C_{n-1}$$

les équations de cette famille d'extrémales. Imaginons maintenant que l'on fasse un changement de variables, en prenant un nouveau système de variables ($y_1, y_2, \dots, y_n$), où

$$y_1 = f_1, \quad y_2 = f_2, \quad \dots, \quad y_{n-1} = f_{n-1},$$

la dernière variable y_n restant arbitraire, à condition de former avec $y_1, \dots, y_{n-1}$ un système de n variables indépendantes. Par ce

changement de variables, la forme donnée ω est remplacée par une nouvelle forme

$$\omega' = Y_1 dy_1 + \dots + Y_n dy_n,$$

tandis que le système (13) est remplacé par le système

$$(18) \quad b_{i1} dy_1 + \dots + b_{in} dy_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où

$$b_{ik} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i}.$$

Ce système (18) doit admettre la solution

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \quad \dots, \quad y_{n-1} = C_{n-1},$$

la variable y_n étant arbitraire, quelles que soient les constantes $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$. On a donc identiquement

$$b_{in} = 0$$

pour toutes les valeurs de l'indice i . D'autre part, on a aussi, quels que soient les indices i, k, l , les identités faciles à vérifier,

$$(24) \quad \frac{\partial b_{ik}}{\partial y_l} + \frac{\partial b_{kl}}{\partial y_i} + \frac{\partial b_{li}}{\partial y_k} = 0,$$

et par suite, en supposant $l = n$,

$$\frac{\partial b_{ik}}{\partial y_n} = 0.$$

Les nouvelles équations (18) ne renferment donc ni y_n ni dy_n , et, par le changement de variables précédent, nous avons remplacé un système de p équations à n variables par un système équivalent à $n - 1$ variables, comprenant p équations linéairement distinctes,

$$(18)' \quad b_{i1} dy_1 + \dots + b_{i,n-1} dy_{n-1} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Si $p = n - 2$, le système (18)' est complètement intégrable, et par suite il en est de même du système primitif (13).

Si $p < n - 2$, le nouveau système (18)' est de même nature que le système (13); en d'autres termes, il définit les courbes extrémales pour une intégrale de la forme

$$\int Z_1 dy_1 + \dots + Z_{n-1} dy_{n-1},$$

où $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}$ ne dépendent que de $y_1, \dots, y_{n-1}$. En effet, la relation (24) étant vérifiée pour toutes les combinaisons d'indices i, k, l , on peut trouver $n - 1$ fonctions Z_i de $y_1, \dots, y_2, y_{n-1}$ vérifiant les relations (1)

$$b_{ik} = \frac{\partial Z_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Z_k}{\partial y_i},$$

et la différence

$$\sum_{i=1}^n Y_i dy_i - \sum_{i=1}^{n-1} Z_i dy_i$$

est une différentielle exacte, de sorte que les extrémales sont les mêmes pour les deux intégrales

$$\int \sum_1^n Y_i dy_i, \quad \int \sum_1^{n-1} Z_i dy_i.$$

On peut donc recommencer la même transformation sur le système (18)', et ainsi de suite. Il est clair qu'on finira par arriver à un système de p équations à $p + 1$ variables seulement, c'est-à-dire à un système complètement intégrable.

8. Du théorème précédent on peut déduire très facilement l'existence d'une forme canonique pour toute expression ω , en suivant une marche très analogue à celle de M. Darboux dans le Mémoire cité plus haut. La démonstration comprend plusieurs parties :

(1) La proposition, qui est classique pour $n = 3$, s'établit de proche en proche par récurrence. On satisfait aux relations

$$\frac{\partial Z_i}{\partial y_i} - \frac{\partial Z_i}{\partial y_1} = b_{1i} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

en prenant

$$Z_1 = 0, \quad Z_i = - \int_{y_1^0}^{y_1} b_{1i} dy_1 + z_i(y_2, \dots, y_n),$$

et, en substituant dans les suivantes, elles deviennent, en tenant compte des relations (24),

$$\frac{\partial z_i}{\partial y_k} - \frac{\partial z_k}{\partial y_i} = b_{ik}(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i, k = 2, 3, \dots, n).$$

On a donc un système de même forme que le premier avec une variable de moins.

I. Toute forme $X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n$, pour laquelle le déterminant Δ est nul, peut être ramenée, par un changement de variables, à la somme d'une forme à moins de n variables, pour laquelle ce déterminant est différent de zéro, et d'une différentielle exacte (qui peut être nulle).

Supposons en effet que les n équations différentielles (13) des extrémales se réduisent à p équations distinctes ($p < n$), ce qui aura toujours lieu si n est impair. Puisque ce système est complètement intégrable, il admet p intégrales premières distinctes, et l'on peut faire un changement de variables tel que les équations différentielles des extrémales se réduisent à

$$(25) \quad dy_1 = 0, \quad \dots \quad dy_p = 0.$$

Soit

$$(26) \quad Y_1 dy_1 + \dots + Y_n dy_n$$

la nouvelle expression de la forme de Pfaff considérée après ce changement de variables. Le système d'équations différentielles

$$(27) \quad b_{i1} dy_1 + \dots + b_{in} dy_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où

$$b_{ik} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i},$$

doit être équivalent au système (25). Il faut et il suffit pour cela que tous les coefficients b_{ik} , où l'un des indices est supérieur à p , soient nuls, et de plus que le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & \dots & \dots & b_{pp} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, ce qui exige que p soit un nombre pair. Si dans la relation générale (24) nous prenons pour les indices i et k des nombres non supérieurs à p , et pour l un nombre supérieur à p , on en déduit immédiatement que tous les coefficients b_{ik} , où $i \leq p$, $k \leq p$, ne dépendent pas de $y_{p+1}, \dots, y_n$. Ces coefficients forment donc un système de $\frac{p(p-1)}{2}$ fonctions des p

variables $y_1, y_2, \dots, y_p$, vérifiant les relations (24), où aucun des indices ne dépasse p . On en déduit comme plus haut que l'on peut trouver p fonctions $Z_1, \dots, Z_p$ ne dépendant que de $y_1, y_2, \dots, y_p$, vérifiant les relations

$$\frac{\partial Z_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Z_k}{\partial y_i} = b_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, p).$$

La différence

$$\sum_{i=1}^n Y_i dy_i - \sum_{k=1}^p Z_k dy_k$$

est donc une différentielle exacte, en vertu des relations

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i} = \frac{\partial Z_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Z_k}{\partial y_i},$$

qui sont vérifiées quels que soient les indices i et k . Cela est évident si aucun des indices i et k n'est supérieur à p . Si l'un des indices, i par exemple, est supérieur à p , on a

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i} = b_{ik} = 0, \quad Z_i = 0, \quad \frac{\partial Z_k}{\partial y_i} = 0.$$

La forme de Pfaff $\sum_1^n Y_i dy_i$ est donc identique à

$$(28) \quad \sum_{k=1}^p Z_k dy_k + dU,$$

$Z_1, \dots, Z_p$ ne dépendant que de $y_1, y_2, \dots, y_p$, et la fonction U pouvant se réduire à une constante; le cas où U ne dépendrait que de $y_1, y_2, \dots, y_p$ se ramène immédiatement à celui-là.

II. Toute forme de Pfaff, pour laquelle le déterminant Δ est différent de zéro (ce qui exige que n soit pair), peut être ramenée, par un changement de variables, à une forme où ne figurent que $\frac{n}{2}$ différentielles. La proposition étant exacte pour $n = 2$, il nous suffira de démontrer que, si elle est vraie jusqu'à une certaine valeur de n , elle est encore vraie pour la valeur de n supérieure de deux unités.

Soit $X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n$ une forme de Pfaff pour laquelle le déterminant Δ n'est pas nul. On peut toujours, et d'une infinité de manières, déterminer un facteur e^λ de façon que le déterminant correspondant pour la forme $e^\lambda(X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n)$ soit nul; en égalant ce déterminant à zéro, on est conduit en effet à une équation aux dérivées partielles du premier ordre, et l'on s'assure aisément que l'une au moins des dérivées de λ figure dans cette équation si Δ n'est pas nul (on reviendra du reste sur ce point au n° 10). La fonction λ ayant été choisie de cette façon, l'expression de Pfaff $e^\lambda(X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n)$ peut, d'après la proposition précédente, être ramenée à la forme

$$Y_1 dy_1 + \dots + Y_p dy_p + dU,$$

$Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ ne dépendant que de $y_1, y_2, \dots, y_p$, et la fonction U pouvant se réduire à une constante. Le nombre p , qui est forcément pair, est au plus égal à $n - 2$. Le déterminant Δ pour la forme $\sum_1^p Y_i dy_i$ n'étant pas nul, on peut, par un nouveau changement de variables, le ramener à une forme où figurent seulement $\frac{p}{2}$ différentielles, puisque le théorème est supposé vrai pour les formes à moins de n variables. Après toutes ces transformations, la forme de Pfaff $e^\lambda \sum X_i dx_i$ est remplacée par une autre forme, où figurent au plus $\frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$ différentielles; nous verrons tout à l'heure qu'il ne peut en figurer moins de $\frac{n}{2}$. Il en est par suite de même de la forme $\sum X_i dx_i$.

III. Soit

$$(29) \quad Y_1 dy_1 + \dots + Y_n dy_n$$

une forme de Pfaff, où ne figurent que n différentielles $dy_1, \dots, dy_n$, et dont les coefficients Y_i dépendent de $2n$ variables $y_1, \dots, y_{2n}$: si le déterminant Δ n'est pas nul, les fonctions $Y_1, \dots, Y_n$ sont des fonctions distinctes de $y_{n+1}, \dots, y_{2n}$.

de Pfaff donnée $\sum_1^n X_i dx_i$ est réductible, et le nombre p . Le nombre $2p$ est égal, en effet, au nombre des équations différentielles distinctes qui définissent les extrémales. Pour distinguer si la forme appartient au type déterminé ou au type indéterminé, il suffit d'observer que dans le premier cas l'équation obtenue en égalant la forme de Pfaff à zéro est une combinaison linéaire des équations différentielles des extrémales, tandis qu'il n'en est pas de même si la forme appartient au type indéterminé.

Par exemple, pour que l'équation

$$(30) \quad X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n = 0$$

soit complètement intégrable, sans que le premier membre soit une différentielle exacte, il faut et il suffit que les équations différentielles des extrémales se réduisent à deux équations distinctes, et que l'équation (30) en soit une combinaison linéaire. On peut vérifier que ces conditions sont suffisantes par un raisonnement analogue à ceux des nos 5-6. En effet, puisque les équations différentielles des extrémales se réduisent à deux, ces courbes sont distribuées sur des multiplicités E_{n-2} à $n-2$ dimensions dépendant de deux constantes arbitraires, et toute courbe située sur l'une de ces multiplicités est une extrémale. De plus, l'intégrale

$$\int X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n,$$

prise le long d'un arc d'extrémale quelconque, est nulle. Cela étant, soit Γ_0 une courbe de l'espace à n dimensions, autre qu'une extrémale, dont tous les éléments du premier ordre vérifient la relation (30). Les multiplicités E_{n-2} , qui passent par les différents points de Γ_0 , forment une multiplicité E_{n-1} , et toutes les courbes Γ situées sur E_{n-1} vérifient la relation (30). Il suffit de reprendre le raisonnement du lemme II (n° 5); E_{n-1} est donc une multiplicité intégrale à $n-1$ dimensions, et il passe évidemment une multiplicité de cette espèce par un point quelconque de l'espace à n dimensions.

La généralisation de la méthode de M. J. Bertrand (FORSYTH, *Theory of differential equation*, Part I. p. 20) consiste à déter-

miner d'abord les extrémales, puis à faire un changement de variables tel que les deux intégrales premières des équations différentielles des extrémales soient précisément $dy_1 = 0$, $dy_2 = 0$. L'équation à intégrer se change alors en une équation différentielle ordinaire à deux variables y_1 et y_2 . Il semble qu'on augmente ainsi la difficulté du problème, puisqu'il faut d'abord obtenir les extrémales de la forme considérée. En réalité, il n'en est rien, car si l'on a intégré l'équation $\Sigma X_i dx_i = 0$, on a par là même mis $\Sigma X_i dx_i$ sous la forme $y_2 dy_1$, et l'on a par conséquent ramené les équations différentielles des extrémales à la forme

$$dy_1 = 0, \quad dy_2 = 0.$$

10. Je terminerai par une remarque relative au cas où le déterminant Δ correspondant à la forme $\sum_1^n X_i dx_i$ n'est pas nul. Pour que le déterminant Δ' correspondant à la forme $e^\lambda \sum_1^n X_i dx_i$ soit nul, il faut et il suffit que les équations suivantes, qui définissent les extrémales pour l'intégrale $\int e^\lambda \Sigma X_i dx_i$,

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{i1} dx_1 + \dots + a_{in} dx_n + X_i d\lambda - \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \left(\sum_1^n X_k dx_k \right) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

soient vérifiées par des valeurs non toutes nulles de dx_1 , dx_2 , ..., dx_n . En éliminant dx_1 , dx_2 , ..., dx_n entre ces n équations homogènes, on obtient une équation aux dérivées partielles du premier ordre en λ . Au lieu de chercher la solution générale, cherchons à déterminer λ de façon que les équations (31) soient vérifiées par des valeurs non toutes nulles de dx_1 , ..., dx_n , satisfaisant aussi à la relation

$$(32) \quad X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n = 0.$$

Les équations (31) se réduisent alors aux suivantes :

$$(33) \quad a_{i1} dx_1 + \dots + a_{in} dx_n + X_i d\lambda = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Réciproquement, si les équations (33) sont vérifiées par des

valeurs non toutes nulles de $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, ces valeurs des dx_i vérifient aussi la relation (32). En effet, en multipliant les n équations (33) par $dx_1, \dots, dx_n$ respectivement, et ajoutant les équations obtenues, il vient

$$d\lambda(X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n) = 0.$$

On ne peut supposer $d\lambda = 0$, puisque par hypothèse les équations (33), où l'on fait $d\lambda = 0$, sont incompatibles pour des valeurs non toutes nulles de $dx_1, \dots, dx_n$. Ces valeurs des dx_i vérifient donc aussi la relation (32), et tout revient à déterminer λ de façon que le déterminant des équations (33) développées soit égal à zéro, ou encore à déterminer λ de façon que les $n + 1$ équations en $dx_1, \dots, dx_n, d\lambda$,

$$(34) \quad \begin{cases} a_{i1} dx_1 + \dots + a_{in} dx_n + X_i d\lambda = 0 & (i = 1, 2, \dots, n), \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} dx_n - d\lambda = 0 \end{cases}$$

soient compatibles. Il faut et il suffit pour cela que λ soit une intégrale de l'équation aux dérivées partielles

$$(35) \quad F(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & X_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & X_n \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation contient nécessairement quelques-unes des dérivées de λ ; pour que toutes ces dérivées disparaissent, il faudrait que le déterminant formé par les mineurs du premier ordre de Δ soit nul, ce qui n'est pas puisque Δ lui-même n'est pas nul. Ayant déterminé une solution λ de cette équation, les équations différentielles (33) définissent les extrémales de l'intégrale

$$\int e^{\lambda} \sum_1^n X_i dx_i,$$

mais on remarquera que λ ne figure dans ces équations différentielles que par sa différentielle $d\lambda$, de sorte que l'on peut déterminer ces extrémales sans connaître la fonction λ elle-même. Il

suffit pour cela d'intégrer le système d'équations différentielles

$$(36) \quad \frac{a_{11} dx_1 + \dots + a_{1n} dx_n}{X_1} = \frac{a_{21} dx_1 + \dots + a_{2n} dx_n}{X_2} = \dots$$

identique au système (20) signalé plus haut (n° 4). Soient

$$f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \quad \dots, \quad f_{n-1} = C_{n-1},$$

l'intégrale générale de ce système. Si l'on prend un nouveau système de variable $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ étant identiques à $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$, la dernière variable y_n pouvant être choisie à volonté, on a vu plus haut (n° 9) que $e^{\lambda}(\Sigma X_i dx_i)$ se change en une expression de la forme

$$Y_1 dy_1 + \dots + Y_{n-1} dy_{n-1} + dU,$$

$Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ ne dépendant que de $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Mais dans le cas actuel dU doit être nul, car les équations (36), qui sont identiques à $dy_1 = 0, \dots, dy_{n-1} = 0$, entraînent la relation $\Sigma X_i dx_i = 0$. On a donc

$$X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n = e^{-\lambda}(Y_1 dy_1 + \dots + Y_{n-1} dy_{n-1});$$

par suite, si l'on fait le changement de variables précédent dans la forme $\Sigma X_i dx_i$, on voit qu'après cette transformation elle ne contiendra pas dy_n , et les rapports des coefficients de $dy_1, \dots, dy_{n-1}$ seront indépendants de y_n . On aura donc mis l'expression $\Sigma X_i dx_i$ sous la forme

$$K(Y_1 dy_1 + \dots + Y_{n-1} dy_{n-1}),$$

la variable y_n ne figurant que dans le facteur K .

La méthode qui précède est absolument identique dans la marche des calculs à celle de M. Darboux (*loc. cit.*, p. 21-22). Leur interprétation seule est légèrement différente.

SUR QUELQUES SURFACES RÉGLÉES A DIRECTRICE RECTILIGNE;

PAR M. BARRÉ.

I. La surface réglée la plus générale admettant une directrice rectiligne peut évidemment être représentée, la directrice étant prise pour Oz , par les équations

$$(1) \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = a(\varphi)\rho + b(\varphi).$$

Les surfaces de vis et les surfaces de vis de seconde espèce ⁽¹⁾ rentrent dans ce type et l'équation de leurs asymptotiques en termes finis est de la forme

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{\varphi^n}{\rho_0}$$

($\rho_0, \rho_1 = \text{const.}$, $n = 1$ dans les surfaces de vis, $n = 2$ dans les surfaces de vis de seconde espèce).

Cette remarque suggère l'idée de rechercher celles des surfaces réglées à directrice rectiligne dont les asymptotiques sont données par l'équation (2) dans laquelle n a une valeur quelconque, cette étude semblant devoir être particulièrement intéressante pour n entier. Dans ce dernier cas, on obtiendra une suite dénombrable de surfaces dont les surfaces de vis des deux espèces constitueront les deux premiers termes. Nous commencerons par résoudre un problème un peu plus général.

II. PROBLÈME. — *Déterminer les surfaces réglées à directrice rectiligne dont les asymptotiques aient pour projection orthogonale, sur un plan perpendiculaire à la directrice, des courbes dont l'équation polaire, en prenant pour pôle le pied de la directrice sur le plan de projection, soit*

$$(3) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + f(\varphi),$$

⁽¹⁾ Nous avons défini antérieurement ces dernières surfaces : ce sont celles pour lesquelles

$$z = h_0(\rho - \rho_0)\varphi \quad (h_0, \rho_0 = \text{const.}).$$

où ρ_1 est une constante dont la valeur caractérise chaque asymptotique et $f(\varphi)$ une fonction donnée de l'argument φ .

Ce problème peut s'énoncer sous une forme plus géométrique qu'on déduit immédiatement de l'examen de l'équation (3). Il n'est autre que le suivant :

Déterminer toutes les surfaces réglées à directrice rectiligne dont les asymptotiques aient pour projection orthogonale sur un plan perpendiculaire à la directrice rectiligne la famille de courbes formée par les inverses d'une famille de courbes conchoïdales par rapport au pied de la directrice sur le plan en question.

On trouve sans peine pour l'équation différentielle du second système d'asymptotiques de la surface

$$(4) \quad \rho[(a + a'')\rho + b''] - 2b' \frac{d\rho}{d\varphi} = 0,$$

ou encore, en divisant par ρ^2 l'équation précédente,

$$(4 \text{ bis}) \quad a + a'' + \frac{b''}{\rho} + 2b' \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\varphi} = 0.$$

L'équation (4 bis) linéaire en $\frac{1}{\rho}$ s'intègre immédiatement⁽¹⁾. On pourrait partir de son intégrale générale pour résoudre la question que nous traitons. Il nous paraît préférable d'opérer directement.

Pour que le problème soit résolu, il faut et il suffit dès lors que les fonctions a et b satisfassent à l'équation

$$(5) \quad a + a'' + b'' \left[\frac{1}{\rho_1} + f(\varphi) \right] + 2b' f'(\varphi) = 0.$$

Mais cette équation doit être vérifiée *quelle que soit* la valeur de ρ_1 , ce qui exige $b'' = 0$; par un choix convenable des coordonnées on voit qu'on ne restreint pas le problème en prenant simplement

$$b = b_0 \varphi \quad (b_0 = \text{const.});$$

(1) Il fallait s'attendre à cette réduction de la recherche des asymptotiques à la résolution d'une équation linéaire à cause de la présence de la directrice rectiligne.

en définitive les surfaces cherchées sont déterminées par les conditions

$$(6) \quad b = b_0 \varphi, \quad a + a'' + 2b_0 f'(\varphi) = 0,$$

d'où l'on tire enfin

$$(7) \quad b = b_0 \varphi, \quad a = 2b_0 \left[\cos \varphi \int^{\varphi} f'(\varphi) \sin \varphi d\varphi - \sin \varphi \int^{\varphi} f'(\varphi) \cos \varphi d\varphi \right];$$

formules dans lesquelles ⁽¹⁾ les limites inférieures des intégrales sont intentionnellement laissées indéterminées. On peut à chacune d'elles donner une valeur arbitraire quelconque.

Avant d'aller plus loin, nous ferons observer que les formules (6) sont susceptibles d'une interprétation géométrique intéressante; pour la première, c'est évident : *l'ascension le long de la directrice du point d'appui de la génératrice est proportionnelle à l'azimut de celle-ci.*

De la seconde on tire immédiatement la conclusion suivante :

Si $[a]$ est une solution de cette équation, la solution générale est

$$(8) \quad a = m \cos \varphi + n \sin \varphi + [a] \quad (m, n = \text{const.}).$$

En portant ces valeurs dans les équations (1), on en conclut que si $[z]$ correspond à la surface définie par $[a]$, la solution générale sera donnée par

$$(9) \quad z = [z] + mx + ny.$$

Comme m et n sont des constantes quelconques, on obtient ainsi un mode immédiat de génération de toutes les surfaces correspondant à une même fonction f , en supposant connue l'une d'elles : *on obtient l'une quelconque des surfaces cherchées en ajoutant sur chaque ordonnée de l'une d'elles la valeur de l'ordonnée correspondante d'un plan absolument quelconque* ⁽²⁾;

(1) L'intégration par parties permet d'écrire aussi pour la seconde

$$(7 \text{ bis}) \quad a = -2b \left[\cos \varphi \int^{\varphi} f \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi \int^{\varphi} f \sin \varphi d\varphi \right].$$

(2) Il semblerait, d'après la formule, qu'il faille ajouter : passant par l'origine. la suppression de cette restriction est sans importance. On obtient des surfaces qui ne diffèrent que par un déplacement de translation d'ensemble.

le lieu des points obtenus est une surface solution de la question et, en prenant tous les plans possibles passant par un point fixe quelconque, on trouve toutes les solutions.

III. Revenons maintenant au problème posé au début de cette étude. La fonction $f(\varphi)$ se réduit à $\frac{\varphi^n}{\varphi_0}$ et la seconde équation (6) devient

$$(6 \text{ bis}) \quad a + a'' + \frac{2nb_0}{\varphi_0} \varphi^{n-1} = 0.$$

Lorsque n est entier et positif, on a immédiatement une solution particulière de cette équation

$$[a] = -\frac{2nb_0}{\varphi_0} [\varphi^{n-1} - (n-1)(n-2)\varphi^{n-3} + \dots \\ + (-1)^p(n-1)(n-2)\dots(n-2p+1)(n-2p)\varphi^{n-2p-1} + \dots],$$

et par suite la surface la plus générale répondant à la question est définie par les équations

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi \cos \varphi, \\ y = \varphi \sin \varphi, \\ z = \varphi \left\{ \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi - 2n \frac{b_0}{\varphi_0} \right. \\ \quad \times [\varphi^{n-1} - (n-1)(n-2)\varphi^{n-3} + \dots + (-1)^p \\ \quad \times (n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-2p+1)(n-2p)\varphi^{n-2p-1} + \dots] \left. \right\} + b_0 \varphi. \end{array} \right.$$

Lorsque l'exposant n n'est plus un entier positif, les formules d'intégration (7) résolvent toujours théoriquement le problème, mais on ne trouve plus de solution particulière simple comme dans le cas précédent. Arrêtons-nous par exemple au cas où $n = -1$.

On trouve, en appliquant la formule (7 bis),

$$a = \frac{2b_0}{\varphi_0} \left[\sin \varphi \int^{\varphi} \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi + \cos \varphi \int^{\varphi} \frac{\cos \varphi}{\varphi} d\varphi \right].$$

Les intégrales du crochet sont, comme on sait, irréductibles aux fonctions élémentaires. On pourra expliciter les constantes d'inté-

gration en écrivant la formule précédente

$$a = \frac{2b_0}{\rho_0} \left[\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi + \sin \varphi \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi + \cos \varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^\varphi \frac{\cos \varphi}{\varphi} d\varphi \right].$$

IV. Un cas tout à fait intéressant du problème général étudié au paragraphe II est celui où

$$f(\varphi) = \frac{1}{m} \cos \varphi \quad (m = \text{const.}).$$

Alors

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{m} \cos \varphi,$$

formule qu'on peut écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} [1 + e \cos \varphi] \quad \left(e = \frac{\rho_1}{m} \right).$$

Ces courbes sont des coniques confocales de même axe focal. La formule générale (7 bis) donne ici

$$a = \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi - \frac{b_0}{m} \left(\varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right).$$

Conformément à ce qui a été dit plus haut, il suffit d'étudier la surface particulière représentée par l'équation

$$z = -\frac{b_0}{m} \left(\varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right) \rho + b_0 \varphi.$$

V. La considération du problème II suggère immédiatement celle du suivant : *Trouver les surfaces réglées à directrice rectiligne dont la seconde famille d'asymptotiques ait pour projection orthogonale sur un plan perpendiculaire à la directrice, une famille de courbes conchoïdales par rapport au pied de la directrice sur ce plan.*

Mais ici on ne trouve, en dehors de la solution sans intérêt constituée par des plans, que l'hélicoïde gauche à plan directeur et les surfaces qui en dérivent comme il est indiqué à la fin du paragraphe II. Les conchoïdes se réduisent alors à des cercles concentriques.

SUR LA CROISSANCE DU MODULE MAXIMUM DES SÉRIES ENTIÈRES ;

PAR M. G. VALIRON.

Nous considérerons dans ce qui suit une série entière de rayon de convergence fini et non nul; nous supposerons ce rayon égal à *un* ainsi que le terme constant, ce qui ne nuira pas à la généralité. Soit

$$(1) \quad f(z) = \Sigma a_n z^n$$

cette série, nous posons

$$|a_n| = A_n = e^{g_n},$$

de sorte que l'on a

$$(2) \quad \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{g_n}{n} = 0.$$

Nous désignerons par $M(r)$ le maximum du module de $f(z)$ pour $|z| = r$ et par $m(r)$ le module du terme (ou des termes) dont le module est pour $|z| = r$ supérieur (ou supérieur ou égal) à celui des autres, et nous appellerons ce terme (ou l'un quelconque de ces termes) *terme maximum*. La relation entre les fonctions $M(r)$ et $m(r)$ pour les valeurs de r voisines de *un* a été étudiée par M. Borel ⁽¹⁾, qui montre, en prenant pour A_n une fonction de n à croissance régulière, et en supposant que l'on ait

$$a_n = A_n, \quad \lim_{n=\infty} \frac{g_n}{\log n} = \infty,$$

que $m(r)$ et $M(r)$ sont du même ordre de grandeur, en ce sens que l'on a

$$(3) \quad \lim_{r=1} \frac{\log M(r)}{\log m(r)} = 1.$$

(¹) BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*, Chap. V.

Dans un récent Mémoire ⁽¹⁾, M. Wiman a obtenu des résultats très précis, mais d'une nature différente; il montre en particulier que, sous la seule condition

$$(4) \quad \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{\log A_n}{\log n} = \infty,$$

on a

$$(5) \quad \lim_{r=1} \frac{\log M(r)}{\log m(r)} = 1.$$

Lorsque la condition (4) est remplacée par des conditions moins générales, la méthode de M. Wiman conduit à des égalités plus précises que (5), mais qui, elles aussi, ne sont valables que pour une suite infinie de valeurs tendant vers ∞ . Je me propose de montrer dans ce qui suit que la méthode que j'ai employée pour les fonctions entières ⁽²⁾ peut donner aussi, dans le cas des séries entières, des résultats assez précis, valables pour toutes les valeurs de r voisines de ∞ . Je montrerai notamment que, lorsque l'un des nombres

$$\overline{\lim}_{n=\infty} \frac{\log g_n}{\log n} \quad \text{ou} \quad \overline{\lim}_{r=1} \frac{\log_2 M(r)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

est fini et différent de zéro, il existe un nombre fini k tel que l'on ait l'inégalité

$$M(r) < m(r) \frac{1}{(1-r)^k} \quad (r > r_0).$$

Dans le cas plus particulier où $M(r)$ vérifie à la fois la condition précédente et la condition

$$(6) \quad \lim_{r=1} \frac{\log M(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty,$$

l'égalité (3) se trouvera réalisée; on obtient ainsi une classe de fonctions pour lesquelles la croissance de $M(r)$ considérée comme

⁽¹⁾ WIMAN, *Ueber dem Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorschen Reihe* (Acta mathematica, t. XXXVII, p. 305).

⁽²⁾ Voir VALIRON, *Sur les fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul* (Annales de la Faculté de Toulouse, 1913).

fonction de $\frac{1}{1-r}$ est assez comparable à celle du module maximum d'une fonction entière d'ordre fini; pour cette classe de fonctions, les calculs seront semblables à ceux que l'on fait pour les fonctions entières; j'indiquerai, par exemple, les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les nombres a_n pour que l'on ait

$$\log M(r) \sim \frac{A}{(1-r)^k}.$$

Lorsque $M(r)$ croît plus vite que dans les cas considérés ci-dessus, les inégalités sont moins simples; mais, en faisant une hypothèse assez large, je montrerai que l'on a

$$(7) \quad M(r) < m(r) [\log m(r)]^{1+\varepsilon(r)} \quad (1),$$

sauf peut-être dans des intervalles exceptionnels, la longueur totale de ceux de ces intervalles qui sont compris entre x et 1 étant infiniment petite par rapport à $1-x$.

1. Pour obtenir le terme maximum de la série (1) pour $|\varepsilon| = r$, nous devons chercher le maximum de

$$g_n + n \log r = g_n - n \log \frac{1}{r}.$$

Marquons dans le plan xOy les points $B_n(n, g_n)$. Le coefficient angulaire des droites OB_n tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment [condition (2)]; il y a donc un nombre fini de points B_n au-dessus de la droite OX_r passant par l'origine et de coefficient angulaire égal à $\log \frac{1}{r}$, et par suite, parmi les points B_n , il y en a un ou plusieurs ayant par rapport aux axes OX_r, Oy une ordonnée supérieure ou égale à celle des autres. Ce point (ou l'un de ces points) donne le terme maximum, et la parallèle D_r à la droite OX_r passant par ce point (ou ces points) laisse tous les autres points B_n au-dessous d'elle. Lorsque r croîtra de 0 à 1, la droite D_r enveloppera un polygone de Newton π tournant sa concavité vers le bas, ayant pour sommets certains des points B_n et laissant les

(1) Dans tout ce travail, je désignerai par $\varepsilon(x)$ toute fonction positive de la variable positive x , qui tend vers zéro lorsque x tend vers un .

autres sur ses côtés ou au-dessous d'eux. Ce polygone π peut avoir un nombre fini de côtés; il faut et il suffit pour cela que l'un des nombres g_n soit supérieur ou égal à tous les autres; si n_0 est son rang, on a alors

$$M(r) < m(r) \frac{A_{n_0}}{1-r},$$

$m(r)$ restant d'ailleurs fini, nous laisserons ce cas de côté. Nous désignerons par G_n l'ordonnée du point du polygone π dont l'abscisse est n ; on a

$$g_n \leq G_n$$

quel que soit n , l'égalité ayant lieu pour les sommets du polygone π . La suite des nombres G_n ne va pas en décroissant, elle peut avoir une limite G ; on aura alors

$$M(r) < m(r) \frac{e^G}{1-r},$$

inégalité qui ne présente pas plus d'intérêt que la précédente. Nous supposons donc que l'on ait

$$\overline{\lim}_{n=\infty} g_n = \lim G_n = \infty,$$

et nous poserons

$$G_{n+1} - G_n = \log r_{n+1},$$

ce qui donne, α_0 étant égal à un ,

$$e^{G_n} = r_1 r_2 \dots r_n.$$

Les nombres r_n ne croissent pas lorsque n croit et tendent vers un ; l'un d'eux, r_n , est le rapport du coefficient du terme de rang $n+1$ au coefficient du terme de rang n dans la série

$$\sum e^{G_n} z^n$$

dont le maximum du module majore celui de $f(z)$ et celui de la série $\sum A_n z^n$, et qui possède, pour chaque valeur de r , un terme maximum de même valeur et de même rang que ces deux séries; nous appellerons r_n *rapport rectifié* de A_{n+1} à A_n . Nous désignerons par $n(x)$ le rang du terme maximum pour $|z| = x$ (ou, plus exactement, le rang du terme maximum de plus haut rang); $n(x)$ est

déterminé par les inégalités

$$r_{n'+1}x < 1 \leq r_{n'}x, \quad n' = n(x);$$

et l'on voit immédiatement que l'on a

$$(8) \quad \log m(r) = \int_0^r n(x) \frac{dx}{x}.$$

2. On a évidemment

$$\begin{aligned} M(r) &< \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{G_n} r^n \\ &< m(r) \left[n_1 + \sum_{p=0}^{p=\infty} r_{n_1} r_{n_1+1} \cdots r_{n_1+p} r^p \right] \\ &< m(r) \left[n_1 + \sum_0^{\infty} (rr_{n_1})^p \right] \end{aligned}$$

sous la seule condition que rr_{n_1} soit plus petit que un , ce qui exige que n_1 soit supérieur à $n(r)$. Nous obtenons donc l'inégalité

$$M(r) < m(r) \left[n_1 + \frac{1}{1 - rr_{n_1}} \right] \quad (rr_{n_1} < 1).$$

La quantité entre crochets est supérieure à $\frac{1}{1-r}$, ce qui est bien conforme à la nature des choses; d'ailleurs, dans le cas qui nous occupera et où l'on aura l'égalité (5), n_1 sera, tout au moins pour certaines valeurs de r , supérieur à $\frac{1}{1-r}$. Nous écrirons l'inégalité obtenue ci-dessus sous une autre forme, soit r' un nombre supérieur à r ; pour

$$n_1 = n(r') + 1,$$

on aura

$$r_{n_1} < \frac{1}{r'};$$

donc

$$(9) \quad M(r) < m(r) \left[n(r') + 1 + \frac{1}{1 - \frac{r}{r'}} \right] \quad (r < r' < 1).$$

C'est cette inégalité que nous emploierons en prenant pour r' une fonction de r convenablement choisie.

3. Nous examinerons rapidement le cas où l'on a

$$(10) \quad \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{g_n}{\log n} = E;$$

les points B_n sont à partir d'une valeur $n_0(\varepsilon)$ de n au-dessous de la courbe

$$y = (E + \varepsilon) \log x,$$

dont la concavité est tournée vers le bas; le polygone π se trouve donc à partir de l'un de ses sommets au-dessous de cette courbe, et cela si petit que soit ε ; on a donc, puisque $g_n \leq G_n$,

$$(10') \quad \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{G_n}{\log n} = E.$$

Inversement, (10') entraîne l'égalité (10). De l'égalité (10') on tire, en remplaçant G_n par $n \log r_n$ qui est inférieur,

$$\overline{\lim}_{n=\infty} (r_n - 1) \frac{n}{\log n} \leq E,$$

c'est-à-dire

$$\overline{\lim}_{r=1} \frac{n(r)(1-r)}{\log \frac{1}{1-r}} \leq E.$$

La formule (9), dans laquelle on prendra $r' = r + \frac{1-r}{\log_2 \frac{1}{1-r}}$,

donnera l'inégalité

$$(11) \quad M(r) < m(r) \frac{E[1 + \varepsilon(r)] \log \frac{1}{1-r}}{1-r},$$

qui est la plus précise que l'on puisse obtenir lorsqu'on fait la seule hypothèse (10). En effet, prenons les sommets du polygone π sur la courbe $y = E \log x$, ces sommets correspondant à une suite de valeurs $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ de n liées par la relation

$$\lim_{p=\infty} \frac{\log n_{p+1}}{\log n_p} = \infty;$$

si l'on prend alors

$$g_n = G_n,$$

on aura

$$M(r) > m(r) \frac{E[1 - \varepsilon(p)] \log \frac{1}{1-r}}{1-r}, \quad r = \frac{1}{r_{n_p}}.$$

Mais, d'autre part, si, le polygone π étant le même que dans le cas particulier précédent, on prend $g_n = 0$, sauf pour les sommets, on

verra bien facilement que l'on aura

$$M(r) = hm(r),$$

h restant fini lorsque r tend vers un; comme $m(r)$ est inférieur à $(1 + \varepsilon) \left[\frac{E}{e(1-r)} \right]^E$, on voit que l'ordre de grandeur de $M(r)$ par rapport à $m(r)$ est mal déterminé et dépend non seulement de la fonction $m(r)$, mais de tous les coefficients a_n . Ce n'est donc qu'en faisant des hypothèses sur la forme du polygone π ou, ce qui revient au même, sur la croissance de $m(r)$, que l'on pourrait arriver à une inégalité plus précise que (11).

Les difficultés seraient encore plus grandes si l'on supposait que E fût nul; nous laisserons ces cas de côté et supposerons dorénavant que les conditions équivalentes

$$\overline{\lim}_{n=\infty} \frac{g_n}{\log n} = \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{G_n}{\log n} = \infty, \quad \overline{\lim}_{r=1} \frac{\log M(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty$$

sont réalisées.

4. Nous supposerons d'abord que l'on ait

$$(12) \quad \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{\log g_n}{\log n} = D \quad (0 < D < 1).$$

On montrera comme plus haut que cette condition est équivalente à

$$(12') \quad \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{\log G_n}{\log n} = D;$$

en remplaçant dans (12') G_n par $n \log r_n$, qui est inférieur, on voit que l'on aura

$$\overline{\lim}_{n=\infty} \frac{\log_2 r_n}{\log n} = D' \leq D - 1$$

et en passant de nouveau de r_n à G_n on voit que $D' = D - 1$; (12') entraîne donc l'égalité

$$(13) \quad \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{\log_2 r_n}{\log n} = D - 1.$$

L'égalité (13) s'écrit aussi sous la forme

$$n(x) \leq (1-x)^{-\frac{1+\varepsilon(x)}{1-D}}$$

et par suite, en prenant dans l'inégalité (9)

$$r' = r + \lambda(1-r) \quad (\lambda > 1),$$

on aura l'inégalité

$$(14) \quad M(r) < m(r)(1-r)^{-\frac{1+\varepsilon(r)}{1-D}}.$$

On montrera comme plus haut que l'inégalité (14) est la plus précise que l'on puisse obtenir lorsqu'on fait la seule hypothèse (12), c'est-à-dire qu'il existe des fonctions dont les coefficients vérifient l'égalité (12) et pour lesquelles on a

$$M(r) > m(r)(1-r)^{-\frac{1-\varepsilon(r)}{1-D}}$$

pour une infinité de valeurs de r tendant vers un .

L'inégalité (14) est analogue à celle que l'on obtient dans le cas des fonctions entières d'ordre fini; on a d'ailleurs, évidemment,

$$(15') \quad \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\log_2 m(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \frac{D}{1-D}$$

et, par suite, l'égalité

$$(15) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\log_2 M(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \frac{D}{1-D}$$

qui, réciproquement, entraîne l'égalité (12), comme on le voit par un calcul facile. Les fonctions que nous considérons sont donc celles pour lesquelles $M(r)$ est majoré par le module maximum d'une fonction entière d'ordre fini (et ne peut l'être par le maximum du module d'une fonction entière d'ordre nul). Pour ces fonctions on a l'inégalité (14), d'où l'on déduit, au moyen de (15'), l'inégalité

$$M(r) < m(r) \{ \log m(r) \}^{\frac{1+\varepsilon(r)}{D}},$$

valable pour une infinité de valeurs de r ayant pour limite un ; mais l'inégalité (14) ne conduit plus à l'égalité (3) comme dans le cas des fonctions entières, puisqu'il n'est pas certain que l'on ait

$$(16) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\log m(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty.$$

On peut d'ailleurs construire effectivement des fonctions pour lesquelles l'égalité (3) n'est pas vérifiée; construisons, par exemple, le polygone π de la façon suivante : traçons la courbe (C)

$$y = x^{\alpha} \quad (\alpha < 1)$$

et la courbe (C')

$$y = \beta \log x;$$

preons B_1 sur (C) et menons par ce point la tangente à (C') ayant un coefficient angulaire positif; ce sera le second côté de π , le second sommet situé sur ce côté étant le premier point B_{n_2} situé au-dessus ou sur (C). Par B_{n_2} nous menons la deuxième tangente à (C'); ce sera le troisième côté de π , le second sommet situé sur ce côté étant le premier point B_{n_3} situé au-dessus de (C), et ainsi de suite. On voit alors immédiatement que l'on a

$$m(r) = \frac{1}{(1-r)^{\beta+\gamma_1(r)}}, \quad r = r_{n_p}, \quad |\gamma_1(r)| = \varepsilon(r),$$

et

$$m(r) = e^{\frac{1}{1-r} \alpha + \gamma_1(r)}, \quad r = e^{-\alpha_{n_p}}, \quad |\gamma_1(r)| = \varepsilon(r),$$

α_{n_p} étant le coefficient angulaire d'une tangente à (C) menée par B_{n_p} . Les valeurs $e^{-\alpha_{n_p}}$ sont donc parmi celles donnant lieu à l'égalité (15), tandis qu'un calcul facile montre que, si l'on prend $g_n = G_n$, on a, pour $r = r_{n_p}$,

$$M(r) = m(r) \frac{1}{(1-r)^{\frac{1+\gamma_1(r)}{1-\alpha}}}$$

et, par suite,

$$M(r) = [m(r)]^{1+\frac{1-\alpha}{\beta}(1+\gamma_1(r))}, \quad |\gamma_1(r)| = \varepsilon(r).$$

On voit également que si l'on prend $g_n = 0$, sauf pour les valeurs n_p , on aura

$$M(r) = h m(r),$$

h restant fini. Ainsi, lorsque l'égalité (16) n'est pas réalisée, la correspondance entre $M(r)$ et $m(r)$ peut être compliquée et dépendre d'autres éléments que de ceux qui déterminent $m(r)$. La condition (16) est d'ailleurs une condition nécessaire pour que l'égalité (3) ait lieu pour toutes les séries entières ayant $m(r)$ pour terme maximum, car il est bien évident que, si l'on prend $g_n = G_n$, on aura pour toute valeur de r

$$M(r) > m(r) \frac{1}{1-r}$$

et, par suite, l'égalité (3) ne peut avoir lieu que si (16) n'est pas réalisée. Dans le cas actuel, cette condition nécessaire est suffi-

sante; elle entraîne l'égalité (6), qui exige que l'on ait

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{\log n} = \infty.$$

Réciproquement, cette égalité (17) entraîne l'égalité (16) et, par suite, l'égalité (3).

5. Pour les fonctions satisfaisant aux conditions (17) et (12) ou (6) et (15), la relation entre $M(r)$ et $m(r)$, c'est-à-dire entre $M(r)$ et la fonction $n(r)$, est la même que dans le cas des fonctions entières; on a

$$(8') \quad \log M(r) \sim \log m(r) \sim \int_0^r n(x) dx;$$

on pourra donc résoudre les mêmes problèmes, et en particulier le problème qui consiste à déduire d'une valeur approchée de $\log M(r)$ les propriétés des coefficients a_n . Cherchons, par exemple, les conditions pour que l'on ait

$$(18) \quad \log M(r) \sim A \frac{1}{(1-r)^k};$$

on aura, d'après (8'),

$$\begin{aligned} n(r')(r-r') &\leq \frac{A+\varepsilon}{(1-r)^k} - \frac{A-\varepsilon}{(1-r')^k} \\ n(r)(r-r') &\geq \frac{A-\varepsilon}{(1-r)^k} - \frac{A+\varepsilon}{(1-r')^k} \end{aligned} \quad (r' < r, \varepsilon > 0).$$

La première de ces inégalités donne

$$n(r') \leq \frac{(A+\varepsilon)k}{(1-r'')^{k+1}} - \frac{2\varepsilon}{(r-r')(1-r')^k} \quad (r' < r'' < r);$$

en prenant

$$r' = r - \sqrt{\varepsilon}(1-r),$$

on aura

$$n(r') \leq \frac{(A+\varepsilon')k}{(1-r')^{k+1}}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = 1.$$

En opérant de même avec la deuxième inégalité, on aura

$$n(r) \sim \frac{Ak}{(1-r)^{k+1}}$$

ou encore

$$n \sim \frac{Ak}{(r_n - 1)^{k+1}};$$

il résulte de cette égalité que l'on aura

$$r_{n(1+\varepsilon)} > r_n$$

quelque petit que soit ε , pourvu que n soit assez grand; on a donc

$$g_n = G_n$$

pour une suite de valeurs de n : $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ telles que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = 1.$$

On a, d'autre part,

$$G_n = \frac{A + \tau_1}{(1-r)^k} - n \log r, \quad |\tau_1| = \varepsilon(r),$$

$$n = \frac{A k + \tau_1'}{(1-r)^{k+1}}, \quad |\tau_1'| = \varepsilon(r),$$

ce qui donne

$$G_n \sim (1+k) A^{\frac{1}{k+1}} \left(\frac{n}{k} \right)^{\frac{k}{k+1}},$$

condition qui entraîne, d'ailleurs, l'égalité (18). On obtient ainsi le résultat suivant : *la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait l'égalité (18) est que*

$$\log A_n < (1+\varepsilon)(1+k) A^{\frac{1}{k+1}} \left(\frac{n}{k} \right)^{\frac{k}{k+1}}, \quad n > n_0(\varepsilon);$$

$$\log A_{n_p} > (1-\varepsilon_p)(1+k) A^{\frac{1}{k+1}} \left(\frac{n_p}{k} \right)^{\frac{k}{k+1}}, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = 1, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \varepsilon_p = 0.$$

6. Lorsque les coefficients a_n satisfont à la condition (4) et à l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log g_n}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log G_n}{\log n} = 0,$$

la formule (9) conduira à l'inégalité

$$M(r) < m(r) (1-r)^{-(1+\varepsilon(r))},$$

qui est évidemment la plus précise que l'on puisse obtenir.

Les fonctions de cette catégorie ont une croissance en quelque sorte comparable à celle d'une fonction entière d'ordre nul pour laquelle $\frac{1}{1-r}$ serait le module de la variable, les restrictions étant les mêmes qu'au n° 4. Lorsque l'égalité (17) est réalisée, on aura

l'égalité (3) pour toutes les fonctions pour lesquelles les nombres G_n auront la même valeur; les calculs pourront se faire comme dans la théorie des fonctions entières.

7. Pour toutes les fonctions pour lesquelles on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{\log n} = \infty, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log G_n}{\log n} = D_1 \quad (D_1 \geq 0),$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\log M(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\log_2 M(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = E_1 \quad \left(E_1 = \frac{D_1}{1-D_1} \right),$$

la relation entre $M(r)$ et la fonction $n(x)$ est donnée par la formule

$$\log M(r) \sim \int_0^r n(x) dx.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{1-r} = X, \quad \log M(r) = U(X), \quad n(r) = N(X),$$

on aura la nouvelle égalité asymptotique

$$(19) \quad U(X) \sim \int_{X_0}^X N(x) \frac{dx}{x^2}$$

qui est plus générale que celle que l'on obtient dans le cas des fonctions entières d'une variable de module X . L'égalité (19) peut servir à chercher des fonctions pour lesquelles le module maximum est une fonction simple du rang du terme maximum et de X . Dans le cas considéré au n° 5, on a

$$(20) \quad U(X) \sim \frac{N(X) \log X}{X \log \frac{N(X)}{X}};$$

nous allons chercher, d'une façon générale, à quelles conditions la relation (20) est réalisée; on obtiendra ainsi des séries entières pour lesquelles *la correspondance d'ordre zéro* ⁽¹⁾ entre $M(r)$ et $n(r)$ est parfaitement régulière. En posant

$$V(X) = \int_{X_0}^X N(x) \frac{dx}{x^2}$$

(1) J'emploie ici la terminologie que j'ai adoptée dans le travail cité plus haut.

et en désignant par $V'(X)$ la dérivée ou la dérivée à droite ou à gauche de $V(X)$, on aura

$$V \sim \frac{V'X \log X}{\log(V'X)},$$

d'où l'on déduit, puisque $\frac{V}{\log X}$ devient infini,

$$V'X \sim \frac{V}{\log X} \log \left(\frac{V}{\log X} \right);$$

cette dernière égalité montre que

$$\lim_{X=\infty} \frac{\log V}{\log_2 X} = \infty$$

et peut, par suite, s'écrire

$$V'X \sim \frac{V \log V}{\log X}.$$

On arrive ainsi aux résultats suivants :

1° *L'égalité (20) est équivalente à*

$$(21) \quad N(X) \sim \frac{U(X)X \log U(X)}{\log X};$$

2° *Une condition nécessaire pour que l'égalité (21) ait lieu est que $U(X)$ soit asymptotiquement égale à une fonction $W(X)$ vérifiant les inégalités*

$$(22) \quad \left(\frac{\log X'}{\log X} \right)^{1-\varepsilon} < \frac{\log W(X')}{\log W(X)} < \left(\frac{\log X'}{\log X} \right)^{1+\varepsilon} \quad [X' > X > X_0(\varepsilon)],$$

où ε est aussi petit que l'on veut.

On vérifiera aisément que cette condition est suffisante; les calculs sont semblables à ceux que l'on fait dans la théorie des fonctions entières. On voit, en particulier, que les conditions (22) sont remplies lorsque $W(X)$ est dérivable et que l'on a

$$W'X \log X \sim W \log W;$$

on voit également que ces conditions (22) exigent que l'on ait

$$\lim_{X=\infty} \frac{\log_2 U(X)}{\log_2 X} = 1.$$

Les conditions relatives à la fonction $N(X)$ et aux coefficients A_n

s'obtiendront également comme dans le Mémoire cité; les formules seront les généralisations de celles trouvées au n° 5.

8. Les fonctions qui vérifient les conditions indiquées au début du n° 7 ont une dérivée dont le maximum du module $M_1(r)$ est de l'ordre de $M(r)$ en ce sens que

$$(23) \quad \lim_{r=1} \frac{\log M_1(r)}{\log M(r)} = 1.$$

En effet, si l'on pose

$$g'_n = g_{n+1} + \log(n+1),$$

on voit que l'on a

$$\overline{\lim}_{n=\infty} \frac{\log g'_n}{\log n} = \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{\log g_n}{\log n} = D_1.$$

Par suite, $m_1(r)$ étant le terme maximum de la dérivée, on aura

$$M_1(r) < m_1(r) (1-r)^{-\frac{1+\varepsilon(r)}{1-b_1}},$$

et comme

$$m_1(r) = n_1(r) a_{n_1(r)} r^{n_1(r)-1} \leq n_1(r) m(r) \frac{1}{r}$$

$[n_1(r)$ désignant le rang du terme maximum de la dérivée], on obtiendra l'inégalité

$$(24) \quad M_1(r) < M(r) (1-r)^{-\frac{2+\varepsilon(r)}{1-b_1}}$$

qui démontre la propriété énoncée, puisque l'on a évidemment

$$M_1(r) > M(r).$$

La relation (24) est d'ailleurs applicable à toutes les fonctions pour lesquelles on a

$$\overline{\lim}_{n=\infty} \frac{\log g_n}{\log n} = D_1,$$

ce qui montre que l'on a pour toutes ces fonctions

$$\lim_{r=1} \frac{\log M_1(r)}{\log M(r)} = 1;$$

mais l'égalité (23) peut n'être pas réalisée, c'est ce qui a lieu pour les fonctions particulières considérées au n° 4.

9. Nous considérerons maintenant les fonctions pour lesquelles les nombres

$$\overline{\lim}_{n=\infty} \frac{\log g_n}{\log n}, \quad \overline{\lim}_{r=1} \frac{\log_2 M(r)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

sont infinis, c'est-à-dire les fonctions dont le module maximum ne peut être majoré que par le module maximum d'une fonction entière d'ordre infini de $z \left(|z| = \frac{1}{1-r} \right)$. Nous obtiendrons pour ces fonctions le même résultat que pour les fonctions entières en faisant une hypothèse destinée à simplifier l'inégalité (9) et à la rendre analogue à celle que l'on trouve dans la théorie des fonctions entières. Nous supposerons que l'on ait

$$(25) \quad \lim_{x=1} \frac{\log n(x)}{\log \frac{1}{1-x}} = \infty$$

et nous prendrons dans l'inégalité (9)

$$r' = r + \frac{1}{n(r)},$$

ce qui est possible à partir d'une certaine valeur r_0 de r ; nous aurons alors

$$(26) \quad M(r) < 2m(r) \left\{ n \left[r + \frac{1}{n(r)} \right] + 1 \right\},$$

$$\log m(r) \sim \int_0^r n(x) dx.$$

Soit r un nombre plus petit que un, on a

$$\int_0^r n(x) dx > n \left(r - \frac{1}{[n(r)]^2} \right) \frac{1}{[n(r)]^2};$$

soit, d'autre part, un nombre β ($\beta < 1$); les propriétés des fonctions croissantes mises en évidence par M. Borel montrent que l'on a

$$n \left(r - \frac{1}{[n(r)]^2} \right) > \left[n \left(r + \frac{1}{[n(r)]^2} \right) \right]^{1-\beta},$$

sauf peut-être dans un ensemble dénombrable d'intervalles dont

la longueur totale pour $r_0 < r < 1$ est au plus égale à

$$\frac{k(\alpha, \beta)}{[n(r_0)]^\alpha},$$

$$k(\alpha, \beta) = 1 + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{[n(r_0)]^{\alpha(1+\beta)^p}}.$$

A l'extérieur des intervalles d'exclusion, on aura

$$M(r) < 3m(r)[\log m(r)]^{\frac{1}{1-\beta-\alpha}},$$

et comme on peut prendre pour α et β des nombres tendant vers zéro avec $1 - r_0$, mais assez lentement pour que le produit

$$\frac{k(\alpha, \beta)}{[n(r_0)]^\alpha} \frac{1}{1 - r_0}$$

tende vers zéro, on obtient le résultat suivant :

Lorsque l'égalité (25) est réalisée, $M(r)$ vérifie la relation

$$(7) \quad M(r) < m(r)[\log m(r)]^{1+\varepsilon(r)}$$

à l'extérieur d'un ensemble dénombrable d'intervalles dont la longueur pour $r > r_0$ est infiniment petite par rapport à $1 - r_0$ ⁽¹⁾.

On voit que l'hypothèse (25) entraîne l'égalité

$$(27) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\log M(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty;$$

réciroquement, de l'égalité (27) on déduit (25); en effet, si (25) n'a pas lieu, il existe un nombre A et une suite infinie de valeurs de x tendant vers un pour lesquelles on a

$$n(x) < \frac{1}{(1-x)^A};$$

(1) Pour les fonctions entières, l'hypothèse (25) n'est pas utile puisque l'inégalité correspondant à la formule (9) est de la forme (26); on a alors un résultat valable pour toutes les fonctions; l'inégalité (7) a lieu, sauf dans des intervalles à l'intérieur desquels $\log r$ varie pour $r > r_0$ de moins de $\frac{k}{[n(r_0)]^{\varepsilon(r_0)}}$, $\varepsilon(r_0)$ tendant vers zéro lorsque r_0 croit indéfiniment.

soit x' une de ces valeurs de x ; en prenant dans l'inégalité (9)

$$r' = x' \quad \text{et} \quad r = x' - (1 - x')^2,$$

on aura

$$\log M(r) < \frac{1 + \varepsilon(r)}{(1 - r)^2}$$

et par suite l'égalité (27) ne sera pas vérifiée.

Relativement aux coefficients, la condition (27) est évidemment équivalente à la condition

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log G_n}{\log n} = 1$$

qui entraîne par suite l'égalité (7) dans les conditions indiquées ci-dessus. Il semble difficile de voir si la condition (25) [ou (27) ou (28)] est nécessaire pour que l'inégalité (7) ait lieu dans les conditions indiquées; il est d'ailleurs probable que, dans l'inégalité (7), l'exposant $1 + \varepsilon(r)$ peut être remplacé par $\frac{1 + \varepsilon(r)}{2}$.

10. Lorsque l'égalité (25) n'est pas réalisée, on a toutefois

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log n(x)}{\log \frac{1}{1-x}} = \infty;$$

soit alors un nombre r_0 pour lequel on a

$$n(r_0) > \frac{1}{(1 - r_0)^A} \quad (A > 1);$$

dans l'intervalle $r_0, 1 - (1 - r_0)^A$, on pourra encore prendre

$$r' = r + \frac{1}{n(r)}$$

et l'on aura

$$M(r) < 3m(r)[\log m(r)]^{1-\alpha-\beta},$$

sauf dans des intervalles de longueur totale inférieure à

$$\frac{k(\alpha, \beta)}{n(r_0)^2}.$$

Comme A peut être pris aussi grand que l'on veut, α et β pourront être pris aussi voisins de zéro que l'on voudra et l'on a encore l'égalité (7), mais dans des conditions moins larges : il peut exister une suite infinie de nombres $r_1, r_2, \dots, r_p, \dots$ tendant vers un et tels que, dans une fraction finie de l'intervalle $r_p, 1$,

on ait

$$M(r) > m(r) [\log m(r)]^k \quad (k > 1)$$

ou même

$$M(r) > [m(r)]^{1+k}.$$

Pour obtenir un exemple de ce dernier cas, on pourra prendre $g_n = G_n$ et définir les nombres G_n de la façon suivante : traçons les courbes (C) et (C')

$$(C) \quad y = k \log x,$$

$$(C') \quad y = \frac{x}{\log x},$$

et prenons les points B_n sur (C) pour $n = 1, 2, \dots, n_0$; puis sur la tangente à (C) au point B_{n_0} jusqu'à ce qu'on obtienne un point B_{n_1} au-dessus de (C'). Par B_{n_1} nous menons la deuxième tangente à la courbe (C) et prenons sur elle les points $B_{n_1+1}, \dots$ jusqu'à B_{n_2} , point dont l'abscisse est inférieure à celle du point de contact de moins d'une unité; nous prenons ensuite $B_{n_2+1}, \dots$ sur (C) jusqu'à un point B_{n_3} en lequel la tangente ait un coefficient angulaire inférieur ou égal à la moitié de celui de la droite $B_{n_1} B_{n_2}$. A partir de B_{n_3} nous procédons comme nous l'avons fait en partant de B_1 , et ainsi de suite. On voit alors immédiatement que l'on se trouve dans le deuxième des cas d'exceptions signalés.

11. Il est clair que, dans les cas les plus simples, l'inégalité (7) doit avoir lieu sans restrictions, et *a fortiori* l'égalité (3); on peut d'ailleurs indiquer des conditions qui entraînent sinon l'inégalité (7), mais au moins l'égalité (3); c'est ce qui a lieu lorsqu'il existe un nombre entier k fini et plus grand que un et tel que

$$\lim_{r=1} \frac{\log_{k+1} M(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = F \quad (F \geq 0)$$

et

$$\lim_{r=1} \frac{\log_k M(r)}{\log \frac{1}{1-r}} > F.$$

Les conditions relatives aux nombres G_n s'obtiennent facilement.

12. En terminant, je montrerai que l'approximation obtenue au

moyen de l'inégalité (9) est, à un facteur fini près, la même que celle que donne la méthode employée par M. Hadamard ⁽¹⁾.

La méthode de M. Hadamard découle de la propriété suivante : Si l'on pose

$$\varphi(r) = \sum_0^{\infty} A_n r^n,$$

$$\psi(X) = \log \varphi(r) \quad (X = \log r),$$

la courbe

$$y = \psi(X) \quad (-\infty < X < 0)$$

tourne sa concavité vers le haut. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dX^2} &= \frac{r}{[\varphi(r)]^2} \{ \varphi(r) [\varphi''(r)r + \varphi'(r)] - r[\varphi'(r)]^2 \} \\ &= \frac{r}{[\varphi(r)]^2} \sum_0^{\infty} \alpha_n r^n \end{aligned}$$

et l'on a

$$\alpha_0 = A_0 A_1,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$\alpha_n = \sum_i A_i A_{n-i+1} (n-2i+1)^2 \quad (i = 0, 1, \dots, p_n),$$

où p_n est la partie entière de $\frac{n+1}{2}$: la propriété énoncée est ainsi établie. Or, nous avons

$$\psi(X) > \log m(r) = \mu(X),$$

la courbe $y = \mu(X)$ est un polygone de Newton π' de sommets $B'_0 B'_1 \dots B'_n \dots$, l'équation du côté $B'_{n-1} B'_n$ étant $y = nX + G_n$. Soit X_n l'abscisse de B'_n , on a pour $X < X_n$

$$\varphi(e^X) = e^{\mu(X_n)} \sum_{p=0}^{p=\infty} e^{p(X-X_n)+G_p-G_n+(p-n)X_n},$$

et comme l'on a

$$G_p - G_n + (p-n)X_n \leq 0,$$

on obtient l'inégalité

$$\psi(X) < \psi(X_n) + \chi(X - X_n),$$

$$\chi(u) = \log \frac{1}{1 - e^u}.$$

(1) Voir *Bulletin de la Société mathématique*, 1896, p. 186.

La courbe $y = \psi(X)$ est donc au-dessous des courbes C_n ,

$$y - y_n = \chi(X - X_n)$$

et par suite, à cause de la direction de sa concavité, au-dessous du contour π'' formé par les segments de droite $D_0 D'_0, \dots, D_n D'_n, \dots$ et par les segments de courbe $D'_0 D_1, \dots, D'_{n-1} D_n, \dots$, où D_n désigne le point de la courbe C_n où la tangente est parallèle à $B'_n B'_{n+1}$, D'_{n-1} le point de C_n où la tangente est parallèle à $B'_{n-1} B'_n$. De même la courbe

$$y = \log M(e^X)$$

reste comprise entre π' et π'' , de sorte que l'on a

$$M(r) < m(r) e^{\nu(r)},$$

$\nu(r)$ étant la différence des ordonnées de π' et π'' pour l'abscisse $X = \log r$. Nous allons montrer que l'on a

$$e^{\nu(r)} = \left[n(r') + \frac{1}{r' - r} \right] h \quad (r' > r),$$

r' étant convenablement choisi, et h étant fini. En effet, soit $\log r'$ l'abscisse du sommet de π' pour lequel il existe une tangente à π' parallèle à la tangente à π'' au point d'abscisse $X = \log r$, on aura

$$\chi(\log r - \log r') < \nu(r) < \chi(\log r - \log r') + 1 + \varepsilon(r),$$

c'est-à-dire

$$e^{\nu(r)} = h \frac{1}{r' - r}, \quad 1 - \varepsilon(r) < h < e[1 + \varepsilon(r)];$$

d'autre part, on a

$$\chi'(u) \sim \frac{1}{u},$$

donc

$$n(r' - 0) < \frac{1 + \varepsilon(r)}{r' - r}$$

et la propriété indiquée est par suite démontrée.

LA DÉFORMATION DES HYPERSURFACES DANS L'ESPACE EUCLIDIEN RÉEL A n DIMENSIONS;

PAR M. E. CARTAN.

Je m'occupe dans le Mémoire qui suit de la déformation des hypersurfaces à $n - 1$ dimensions dans l'espace euclidien réel à $n \geq 4$ dimensions. Le problème à résoudre est le suivant :

Étant donnée une hypersurface (S) , trouver toutes les hypersurfaces (Σ) applicables sur (S) (avec conservation des longueurs d'arcs).

Ce problème a fait l'objet de travaux nombreux et bien connus dans le cas $n = 3$; on sait que, dans ce cas, il existe une infinité de surfaces (Σ) applicables sur une surface donnée (S) ; elles dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument. Dans le cas $n > 3$ il n'en est plus ainsi : *en général les seules hypersurfaces (Σ) applicables sur une hypersurface donnée (S) sont égales ou symétriques à (S) . Il en est sûrement ainsi lorsque l'hyperplan tangent à (S) dépend de plus de deux paramètres.*

Il n'y a donc que des catégories spéciales d'hypersurfaces qui puissent être déclarées *déformables*. Ce sont les suivantes :

a. Les hypersurfaces développables, enveloppes d'un hyperplan dépendant d'un paramètre; elles sont toutes applicables sur un hyperplan.

b. Les hypersurfaces dont l'équation peut être ramenée, par un choix convenable des axes de coordonnées rectangulaires, à la forme

$$(1) \quad F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

ou à la forme

$$(2) \quad \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

cette dernière équation étant homogène. La déformation de l'hy-

persurface se ramène alors, dans le premier cas, à celle de la surface définie, dans un espace euclidien à trois dimensions, par l'équation (1); dans le second cas, à celle de la surface définie, dans un espace sphérique à trois dimensions, par l'équation (2), avec

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

L'hypersurface (Σ) la plus générale dépend ici de deux fonctions arbitraires d'un argument.

c. Les hypersurfaces lieux d'une variété plane à $n - 2$ dimensions dépendant d'un paramètre. Les hypersurfaces applicables dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.

d. Les hypersurfaces enveloppes d'un hyperplan à deux paramètres u et v lorsque les coordonnées tangentielles de cet hyperplan

$$x_1 x_1 + \dots + x_n x_n - x = 0$$

satisfont à une même équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \gamma f = 0,$$

et que la somme

$$x_1^2 - \dots - x_n^2$$

est la différence $U - V$ entre une fonction de u et une fonction de v , ou encore lorsqu'on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v} - \gamma \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 = 0.$$

Les hypersurfaces (Σ) sont de la même catégorie, avec la même équation de Laplace; mais les fonctions U et V subissent, en passant de (S) à (Σ), une même transformation homographique à coefficients constants; ces hypersurfaces (Σ) dépendent d'une paramètre (en ne considérant pas comme distinctes deux hypersurfaces égales ou symétriques).

e. Il existe enfin certaines hypersurfaces (S) qui sont applicables sur une seule hypersurface (Σ) non égale ni symétrique à (S); ce sont les enveloppes d'un hyperplan à deux paramètres u

et c , les coordonnées tangentielles de cet hyperplan satisfaisant à une même équation (non arbitraire) de Laplace. Ces hypersurfaces (S) n'admettent pas de déformation continue.

Les nos 1 à 6 contiennent le principe de la méthode employée; le n° 7 est consacré aux hypersurfaces développables; le n° 8 montre que toute hypersurface dont l'hyperplan tangent dépend de plus de deux paramètres est indéformable. Les hypersurfaces de la catégorie b font l'objet du n° 12; celles de la catégorie c , des nos 13-16; celles de la catégorie d , des nos 17-21. On étudie avec plus de détail des cas particuliers intéressants dans les derniers nos 22-23, spécialement la déformation des hypersurfaces enveloppes de l'hyperplan

$$U_1x_1 + \dots + U_px_p - V_1y_1 + \dots + V_qy_q = U + V,$$

où les U sont des fonctions de u seul et les V de v seul.

Les résultats obtenus dans ce Mémoire peuvent être étendus au problème de la représentation conforme dans un espace à $n \geq 5$ dimensions : ce sera l'objet d'un prochain Mémoire.

FORMULES PRÉLIMINAIRES.

I. Considérons, dans l'espace euclidien réel à n dimensions, un n -èdre formé d'un point M et de n vecteurs unités rectangulaires $I_1, I_2, \dots, I_n$ issus de ce point. Supposons que les coordonnées de l'origine M et les projections des n vecteurs soient des fonctions d'un certain nombre de paramètres, nombre qui ne peut pas dépasser $\frac{n(n+1)}{2}$. Si l'on considère les $n+1$ vecteurs infiniment petits $dM, dI_1, \dots, dI_n$ obtenus en donnant aux paramètres des accroissements infiniment petits, ces vecteurs peuvent s'exprimer linéairement au moyen des vecteurs $I_1, I_2, \dots, I_n$ eux-mêmes, les coefficients étant des expressions différentielles linéaires. En exprimant que les vecteurs $I_1, I_2, \dots, I_n$ restent de longueur 1 et rectangulaires entre eux, on arrive facilement aux formules fondamentales

$$(1) \quad \begin{cases} dM = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \dots + \omega_n I_n, \\ dI_r = \pi_{r1} I_1 + \pi_{r2} I_2 + \dots + \pi_{rn} I_n \quad (r = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

où les expressions ϖ_{rk} satisfont aux relations

$$(2) \quad \varpi_{rr} = 0, \quad \varpi_{rs} = -\varpi_{sr}.$$

Les expressions ω_i , ϖ_{rs} ne sont pas autre chose que les composantes par rapport aux axes du n -èdre du déplacement instantané de ce n -èdre.

Les covariants bilinéaires des expressions ω_i , ϖ_{rs} s'expriment en fonctions bilinéaires de ces mêmes expressions d'une manière simple qu'on obtient immédiatement en annulant les covariants bilinéaires des seconds membres des équations (1). On trouve ainsi

$$(3) \quad \begin{cases} \omega'_r = [\omega_1 \varpi_{1r}] + [\omega_2 \varpi_{2r}] + \dots + [\omega_n \varpi_{nr}], \\ \varpi'_{rs} = [\varpi_{r1} \varpi_{1s}] + [\varpi_{r2} \varpi_{2s}] + \dots + [\varpi_{rn} \varpi_{ns}] \quad (r, s = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Ces formules constituent les formules de structure du groupe des déplacements euclidiens de l'espace à n dimensions. Dans le cas de $n = 3$, elles reproduisent sous une forme condensée des formules classiques dans la théorie des mouvements à plusieurs paramètres.

2. On peut aussi considérer l'espace au point de vue tangentiel. Désignons par P_r le premier membre de l'équation *normale* de l'hyperplan mené par M et perpendiculaire au vecteur I_r ; en désignant par μ le point courant, on a

$$P_r \equiv I_r | (\mu - M),$$

le second membre étant le produit géométrique du vecteur I_r et du vecteur $\mu - M$ d'origine M et d'extrémité μ ; on a

$$dP_r = dI_r | (\mu - M) - I_r | dM = \sum_{s=1}^{r=n} \varpi_{rs} P_s - \omega_r.$$

Aux formules (1) doivent donc s'ajouter les formules dualistiques

$$(1') \quad dP_r = \varpi_{r1} P_1 + \varpi_{r2} P_2 + \dots + \varpi_{rn} P_n - \omega_r \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

dont les seconds membres contiennent les $\frac{n(n+1)}{2}$ expressions ω_i , ϖ_{rs} . Ces formules nous seront très utiles dans la suite.

3. Considérons une variété à $n - 1$ dimensions de l'espace à n dimensions : nous appellerons, pour abrégé, *hypersurface* une telle variété. La position d'un point M sur cette hypersurface dépend de $n - 1$ paramètres $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$. Considérons alors un n -èdre variable ayant pour origine un point M variable de l'hypersurface et tel que le vecteur l_n soit normal à l'hypersurface. Le point M étant donné, ce n -èdre peut encore dépendre de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ paramètres. Pour ce n -èdre variable, on a des formules telles que (1), (1') ; mais, ici, l'expression ω_n est identiquement nulle. Les formules (3) montrent alors que l'on a

$$[\omega_1 \varpi_{1n}] + [\omega_2 \varpi_{2n}] + \dots + [\omega_{n-1} \varpi_{n-1,n}] = 0;$$

on en déduit facilement que les expressions $\varpi_{1,n}, \varpi_{2,n}, \dots, \varpi_{n-1,n}$ sont des combinaisons linéaires de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$, ou encore de

$$dt_1, dt_2, \dots, dt_{n-1};$$

cela est d'ailleurs évident autrement, car l'hyperplan tangent P_n étant fonction des seuls paramètres $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$, les composantes ϖ_{nr} de sa différentielle dP_n dépendent linéairement de

$$dt_1, dt_2, \dots, dt_{n-1}.$$

Remarquons du reste, et cette remarque jouera un grand rôle dans la suite, que le nombre des paramètres indépendants dont dépend l'hyperplan tangent est égal au nombre des expressions $\varpi_{1n}, \varpi_{2n}, \dots, \varpi_{n-1,n}$ linéairement indépendantes.

4. Proposons-nous maintenant, étant donnée une hypersurface (S), de trouver toutes les hypersurfaces (Σ) applicables sur (S). Nous supposerons que nous avons *attaché* à chaque point de (S) un n -èdre satisfaisant aux conditions du numéro précédent ; ce n -èdre dépendra des $n - 1$ paramètres $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$. Le ds^2 de l'hypersurface (S) est évidemment

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots + \omega_{n-1}^2.$$

Si N est un point variable de l'hypersurface (Σ), ses coordonnées sont des fonctions de $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$, et l'on peut toujours trouver

$n - 1$ vecteurs $J_1, J_2, \dots, J_{n-1}$ tels que l'on ait

$$dN = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \dots + \omega_{n-1} J_{n-1};$$

la condition que le ds^2 de (Σ) soit le même que celui de (S) montre alors que ces $n - 1$ vecteurs J_r sont de longueur 1 et rectangulaires entre eux. Désignons alors par J_n le vecteur-unité rectangulaire à $J_1, \dots, J_{n-1}$. On définit ainsi en chaque point de (Σ) un certain n -èdre attaché à l'hypersurface.

Le n -èdre le plus général de l'espace à n dimensions dépendant de $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres $u_1, \dots, u_N$, le problème proposé revient alors au suivant :

Déterminer les quantités $u_1, u_2, \dots, u_N$ en fonction de $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$, de manière à avoir l'identité

$$(5) \quad dN = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \dots + \omega_{n-1} J_{n-1}.$$

Ce premier problème une fois résolu, on connaîtra les composantes mobiles du mouvement instantané du n -èdre attaché à (Σ) et il suffira ensuite d'en déduire le mouvement de (Σ) pour avoir en particulier les coordonnées de N en fonction de $t_1, \dots, t_{n-1}$.

5. Désignons par de grandes lettres Ω_r, Π_{rs} les composantes du mouvement instantané du n -èdre le plus général $NJ_1, \dots, J_n$: ce sont des expressions de Pfaff aux variables $u_1, u_2, \dots, u_N$. Le système différentiel à intégrer est alors

$$(5) \quad \begin{cases} \Omega_1 = \omega_1, \\ \Omega_2 = \omega_2, \\ \dots\dots\dots, \\ \Omega_{n-1} = \omega_{n-1}, \\ \Omega_n = 0. \end{cases}$$

Les premiers membres ne dépendent que des fonctions inconnues $u_1, \dots, u_N$; les seconds membres, des variables indépendantes $t_1, \dots, t_{n-1}$.

Égalons les covariants bilinéaires des deux membres de chacune des équations (5); nous avons, en tenant compte de ces équations

Le nombre des expressions bilinéaires $[\mathfrak{L}_r \mathfrak{L}_s]$ linéairement indépendantes est alors de $\frac{h(h-1)}{2}$. Il faut, d'après (8), que ce nombre soit le même pour l'hypersurface (S) et l'hypersurface (Σ). Il faut donc que, pour ces deux hypersurfaces, le nombre h ait la même valeur, à moins que la somme des valeurs de ce nombre pour (S) et (Σ) ne soit égale à 1, c'est-à-dire à moins que (S) ne soit un hyperplan ou l'enveloppe d'un hyperplan dépendant d'un paramètre.

Donc, pour que deux hypersurfaces soient applicables, il faut que, pour ces deux hypersurfaces, l'hyperplan tangent dépende du même nombre de paramètres; exception faite du cas où l'une des hypersurfaces serait un hyperplan et l'autre l'enveloppe d'un hyperplan à un paramètre (hypersurface développable).

LES HYPERSURFACES DÉVELOPPABLES.

7. Examinons tout de suite ce cas d'exception, et pour cela supposons que (S) soit l'enveloppe d'un hyperplan dépendant d'un paramètre.

Le système de Pfaff

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_r = 0 & (r = 1, 2, \dots, n-1), \\ \Omega_n = 0, \\ \mathfrak{W}_r = 0 & (r = 1, 2, \dots, n-1), \\ \Pi_{rs} = 0 & (r, s = 1, 2, \dots, n-1) \end{array} \right.$$

est complètement intégrable, car les covariants bilinéaires des deux membres de chacune de ses équations sont égaux en tenant compte des équations (9) elles-mêmes : cela tient à ce que les expressions $[\mathfrak{L}_r \mathfrak{L}_s]$ sont identiquement nulles. Ce système (9) étant complètement intégrable, il existe une hypersurface (Σ) applicable sur (S) et telle que $\mathfrak{W}_r = 0$: c'est évidemment un hyperplan.

Toute hypersurface enveloppe d'hyperplans dépendant d'un paramètre est donc applicable sur un hyperplan.

LES HYPERSURFACES
DONT L'HYPERPLAN TANGENT DÉPEND DE PLUS DE DEUX PARAMÈTRES.

8. Passons maintenant au cas où l'hypersurface (S) est l'enveloppe d'un hyperplan dépendant de $h \geq 3$ paramètres.

Les égalités

$$[\Psi_1 \Psi_r] = [\psi_1 \psi_r]$$

conduisent aux suivantes :

$$0 = [\Psi_1 \Psi_1 \Psi_r] = [\Psi_1 \psi_1 \psi_r].$$

Ces dernières montrent que, si Ψ_1 et ψ_1 sont linéairement indépendantes, chaque expression ψ_r est une combinaison linéaire de Ψ_1 et de ψ_1 : cela n'est pas possible, car alors h serait au plus égal à 2. Il y a donc une relation linéaire au moins entre Ψ_1 et ψ_1 . D'autre part, si ψ_1 est nulle, Ψ_1 l'est aussi : sinon, en effet, les égalités

$$[\Psi_1 \Psi_r] = 0$$

montreraient que chaque expression Ψ_r est proportionnelle à Ψ_1 et h serait égal à 1; de même, ψ_1 est nulle si Ψ_1 l'est.

Il résulte de là que, dans tous les cas, on peut écrire

$$\Psi_r = \varepsilon_r \psi_r,$$

ε_r étant un coefficient différent de zéro. Supposons maintenant que ψ_1, ψ_2, ψ_3 soient linéairement indépendantes; les égalités

$$[\Psi_1 \Psi_2] = [\psi_1 \psi_2], \quad [\Psi_1 \Psi_3] = [\psi_1 \psi_3], \quad [\Psi_2 \Psi_3] = [\psi_2 \psi_3]$$

donnent

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \pm 1;$$

puis $\varepsilon_r = \varepsilon_1$ si ψ_r n'est pas nulle. En définitive on a, quel que soit r ,

$$\Psi_r = \varepsilon \psi_r \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Si $\varepsilon = -1$, en changeant le sens du vecteur J_n , on se ramène au cas $\varepsilon = 1$, et finalement on trouve

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_r = \omega_r, \\ \Omega_n = \omega_n, \\ \Pi_{rs} = \pi_{rs}, \\ \Psi_r = \psi_r. \end{array} \right.$$

Les mouvements instantanés des n -èdres attachés à (S) et (Σ) sont donc les mêmes, et par suite les hypersurfaces (S) et (Σ) sont *égales* (ou symétriques). Autrement dit, l'hypersurface (S) est *indéformable*.

Toute hypersurface dont l'hyperplan tangent dépend de trois ou d'un plus grand nombre de paramètres est indéformable.

LES HYPERSURFACES ENVELOPPES D'UN HYPERPLAN A DEUX PARAMÈTRES.

9. Reste le cas $h = 2$. Dans ce cas, on peut choisir les axes du n -èdre attachés aux différents points de (S) de manière à avoir

$$\psi_3 = \psi_4 = \dots = \psi_{n-1} = 0.$$

L'hypersurface est l'enveloppe d'une famille d'hyperplans dépendant de deux paramètres et la caractéristique de l'hyperplan P_n est la variété plane à $n - 3$ dimensions intersection de P_n, P_1, P_2 . L'hyperplan tangent est le même tout le long de cette variété plane.

On a, pour toute hypersurface (Σ) applicable sur (S),

$$\Psi_3 = \Psi_4 = \dots = \Psi_{n-1} = 0.$$

Toute hypersurface (Σ) satisfait donc au système de Pfaff

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_r - \omega_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n-1), \\ \Omega_n = 0, \\ \Pi_{rs} - \pi_{rs} = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, n-1), \\ \Psi_3 = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \Psi_{n-1} = 0, \end{array} \right.$$

et l'on a, en tenant compte de ces équations (11),

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega'_r - \omega'_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n-1), \\ \Omega'_n \equiv [\omega_1 \Psi_1] + [\omega_2 \Psi_2], \\ \Pi'_{12} - \pi'_{12} = -[\Psi_1 \Psi_2] + [\psi_1 \psi_2], \\ \Pi'_{1r} - \pi'_{1r} = 0 \quad (r = 3, \dots, n-1), \\ \Pi'_{rs} - \pi'_{rs} \equiv 0 \quad (r, s = 3, \dots, n-1), \\ \Psi'_r \equiv -[\pi_{1r} \Psi_1] - [\pi_{2r} \Psi_2] \quad (r = 3, \dots, n-1). \end{array} \right.$$

10. Faisons d'abord la remarque suivante. L'équation $\omega_n = 0$ donne

$$[\omega_1 \psi_1] + [\omega_2 \psi_2] = 0,$$

ce qui montre que ψ_1 et ψ_2 sont deux combinaisons linéaires (nécessairement indépendantes) de ω_1 et ω_2 . L'équation $\psi_r = 0$ conduit alors à

$$[\varpi_{1r} \psi_1] + [\varpi_{2r} \psi_2] = 0,$$

ce qui montre que ϖ_{1r} et ϖ_{2r} sont deux combinaisons linéaires de ψ_1 et ψ_2 , et par suite de ω_1 et ω_2 . On voit donc que les seconds membres des équations (12) ne font intervenir que quatre expressions de Pfaff $\omega_1, \omega_2, \Psi_1, \Psi_2$ indépendantes des premiers membres des équations (11); sur ces quatre expressions, deux dépendent des différentielles des variables indépendantes, deux des différentielles des fonctions inconnues.

Posons

$$(13) \quad \begin{cases} \varpi_{1r} = \alpha_r \omega_1 + \beta_r \omega_2 \\ \varpi_{2r} = \gamma_r \omega_1 + \delta_r \omega_2 \end{cases} \quad (r = 3, \dots, n-1)$$

La condition

$$[\omega_1 \Psi_1] + [\omega_2 \Psi_2] = 0$$

permet de poser

$$(14) \quad \begin{cases} \Psi_1 = \Lambda \omega_1 + \mathbf{M} \omega_2, \\ \Psi_2 = \mathbf{M} \omega_1 + \mathbf{N} \omega_2 \end{cases}$$

avec trois coefficients arbitraires $\Lambda, \mathbf{M}, \mathbf{N}$; soient λ, μ, ν les valeurs de ces coefficients pour (S); la condition

$$[\Psi_1 \Psi_2] = [\psi_1 \psi_2]$$

donne

$$(15) \quad \Lambda \mathbf{N} - \mathbf{M}^2 = \lambda \nu - \mu^2.$$

Enfin, la condition

$$[\varpi_{1r} \Psi_1] + [\varpi_{2r} \Psi_2] = 0$$

donne

$$(16) \quad \beta_r \Lambda + (\delta_r - \alpha_r) \mathbf{M} - \gamma_r \mathbf{N} = 0 \quad (r = 3, \dots, n-1),$$

équations vérifiées aussi bien pour (S) que pour (Σ). Ces équations se réduisent évidemment à deux *au plus*.

11. D'après cela, plusieurs cas sont possibles, suivant :

- 1° Qu'il y a deux équations (16) indépendantes ;
- 2° Qu'il y a une seule équation (16) indépendante ;
- 3° Que les équations (16) se réduisent toutes à des identités.

Éliminons d'abord le premier cas, qui donne évidemment

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{M}{\mu} = \frac{N}{\nu},$$

ces rapports étant, d'après (15), égaux à ± 1 ; on a alors, en changeant au besoin le sens de la normale de (Σ),

$$\Psi_1 = \psi_1, \quad \Psi_2 = \psi_2,$$

et par suite (Σ) et (S) sont égales et symétriques. Dans ce cas général, l'hypersurface (S) est indéformable.

Restent les deux autres cas : nous allons commencer par le dernier.

LES HYPERSURFACES DÉFORMABLES DE LA PREMIÈRE CATÉGORIE.

12. Dans ce cas, on a

$$\alpha_r = \delta_r, \quad \beta_r = 0, \quad \gamma_r = 0,$$

les covariants bilinéaires qui se trouvent aux seconds membres de (12) se réduisent alors à deux indépendants, à savoir

$$\begin{aligned} & [\omega_1 \Psi_1] + [\omega_2 \Psi_2], \\ & [\psi_1 \psi_2] - [\Psi_1 \Psi_2]. \end{aligned}$$

Le système (11) est par suite en involution et son intégrale générale dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument. *Il y a donc une infinité d'hypersurfaces (Σ) applicables sur (S) et ces hypersurfaces dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument.*

On peut, du reste, caractériser d'une manière géométrique simple les hypersurfaces (S) en question et ramener le problème de leur déformation à celui de la déformation d'une surface dans l'espace à trois dimensions euclidien ou sphérique.

1. Supposons, en premier lieu, tous les coefficients α_r nuls.

Les formules

$$(17) \quad \begin{cases} dP_n = -\psi_1 P_1 - \psi_2 P_2, \\ dP_1 = \pi_{12} P_2 + \psi_1 P_n - \omega_1, \\ dP_2 = \pi_{21} P_1 + \psi_2 P_n - \omega_2 \end{cases}$$

montrent alors que le système linéaire d'hyperplans

$$\lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_n + \varrho$$

est *fixe* ⁽¹⁾. Si l'on choisit les axes fixes de manière que les trois premiers plans de coordonnées fassent partie de ce système, l'hyperplan tangent à (S) a une équation de la forme

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u = 0,$$

où les coefficients dépendent de deux paramètres. Par suite, l'équation de l'hypersurface est de la forme

$$(18) \quad F(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Les variétés linéaires à $n-3$ dimensions $\mathfrak{Q}$ qui engendrent l'hypersurface et qui sont les caractéristiques de l'hyperplan tangent (intersection des hyperplans P_n, P_1, P_2) font partie d'un réseau fixe.

$$x_1 = \text{const.}, \quad x_2 = \text{const.}, \quad x_3 = \text{const.}$$

Le réseau des variétés linéaires orthogonales à trois dimensions $\mathfrak{Q}'$.

$$x_4 = \text{const.}, \quad \dots, \quad x_n = \text{const.}$$

est également fixe. Par chaque point de l'espace passe une variété linéaire $\mathfrak{Q}$ du premier réseau et une seule, une variété linéaire $\mathfrak{Q}'$ du second réseau et une seule: par le point M par exemple la variété ($\mathfrak{Q}$) est l'intersection des hyperplans P_n, P_1, P_2 ; la variété ($\mathfrak{Q}'$) l'intersection des hyperplans $P_3, \dots, P_{n-1}$. Chaque variété linéaire $\mathfrak{Q}$ coupe l'hypersurface (S) suivant une variété à deux dimensions ou

(1) En effet, la forme linéaire de ces équations aux différentielles totales montre que l'on a

$$P_1 = \xi_1 \Lambda_1 + \xi_2 \Lambda_2 + \xi_3 \Lambda_3 + \xi,$$

$$P_2 = \eta_1 \Lambda_1 + \eta_2 \Lambda_2 + \eta_3 \Lambda_3 + \eta,$$

$$P_n = \zeta_1 \Lambda_1 + \zeta_2 \Lambda_2 + \zeta_3 \Lambda_3 + \zeta,$$

les hyperplans $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ étant des hyperplans fixes arbitraires.

surface (s) et l'hypersurface (S) est engendrée en menant par chaque point de (s) la variété génératrice $\mathfrak{Q}$ qui passe par ce point. Sur une variété $\mathfrak{Q}$ fixe $\omega_3, \dots, \omega_{n-1}$ sont nuls et l'on a

$$(19) \quad \begin{cases} dM = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2, \\ dI_1 = \varpi_{12} I_2 + \psi_1 I_n, \\ dI_2 = \varpi_{21} I_1 + \psi_2 I_n, \\ dI_n = -\psi_1 I_1 - \psi_2 I_2. \end{cases}$$

Le ds^2 de la surface (1) est donc $\omega_1^2 + \omega_2^2$.

L'hypersurface (Σ) a une génération analogue à celle de (S) avec deux réseaux orthogonaux de variétés linéaires $\mathfrak{Q}$ à $n-3$ dimensions, $\mathfrak{Q}'$ à trois dimensions, chaque variété $\mathfrak{Q}'$ coupant (Σ) suivant une surface (τ) . *Pour l'applicabilité de (S) sur (Σ) il faut que les surfaces (s) et (τ) , considérées comme appartenant chacune à un espace euclidien à trois dimensions $(\mathfrak{Q})$ et $(\mathfrak{Q}')$, soient applicables l'une sur l'autre, et il est évident que la condition est suffisante.*

II. Supposons en second lieu que les coefficients z_r ne sont pas tous nuls. Partons des formules

$$\begin{aligned} dP_n &= -\psi_1 P_1 - \psi_2 P_2, \\ dP_1 &= \varpi_{12} P_2 + \omega_1 (z_3 P_3 + \dots + z_{n-1} P_{n-1} + 1) + \psi_1 P_n, \\ dP_2 &= \varpi_{21} P_1 + \omega_2 (z_3 P_3 + \dots + z_{n-1} P_{n-1} + 1) + \psi_2 P_n; \end{aligned}$$

on peut choisir le n -èdre attaché à l'hypersurface de manière à avoir

$$z_3 = \dots = z_{n-1} = 0;$$

il suffit pour cela de prendre le plan $z_3 P_3 + \dots + z_{n-1} P_{n-1}$ pour troisième plan coordonné; écrivons pour abrégier z à la place de z_3 .

Des formules

$$\varpi_{1r} = 0, \quad \varpi_{2r} = 0 \quad (r = 4, \dots, n-1)$$

on déduit, par (3),

$$z[\omega_1 \varpi_{3r}] = z[\omega_2 \varpi_{3r}] = 0;$$

d'où

$$\varpi_{3r} = 0 \quad (r = 4, \dots, n-1).$$

De

$$\varpi_{13} = z\omega_1, \quad \varpi_{23} = z\omega_2$$

on déduit ensuite

$$\begin{aligned} [\omega_1(dx - x^2\omega_1)] &= [\omega_2(dx - x^2\omega_3)] = 0, \\ \text{d'où} \qquad \qquad \qquad dx &= x^2\omega_3. \end{aligned}$$

De là résultent les formules

$$(20) \quad \begin{cases} dP_n = -\psi_1 P_1 - \psi_2 P_2, \\ dP_1 = -\varpi_{12} P_2 - x\omega_1 \left(P_3 - \frac{1}{x} \right) - \psi_1 P_n, \\ dP_2 = -\varpi_{21} P_1 - x\omega_2 \left(P_3 - \frac{1}{x} \right) - \psi_2 P_n, \\ d \left(P_3 - \frac{1}{x} \right) = -x\omega_1 P_1 - x\omega_2 P_2. \end{cases}$$

Par suite le système linéaire d'hyperplans

$$\lambda P_1 + \mu P_2 + \nu \left(P_3 - \frac{1}{x} \right) + \rho P_n$$

est fixe. Si l'on choisit les axes fixes de manière que les quatre premiers hyperplans de coordonnées fassent partie de ce système, on voit que l'hypersurface (S) est l'enveloppe d'un hyperplan

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

où les coefficients dépendent de deux paramètres. Autrement dit l'équation de l'hypersurface est de la forme

$$(21) \quad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

F étant homogène.

L'hypersurface est engendrée par des variétés linéaires à $n - 3$ dimensions $\mathcal{Q}$ qui font partie du réseau fixe

$$\frac{x_1}{\text{const.}} = \frac{x_2}{\text{const.}} = \frac{x_3}{\text{const.}} = \frac{x_4}{\text{const.}};$$

leurs trajectoires orthogonales à trois dimensions $\mathcal{Q}'$ forment également un réseau fixe

$$x_5 = \text{const.}, \quad \dots, \quad x_n = \text{const.}, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \text{const.};$$

ce sont des variétés hypersphériques à trois dimensions : la quantité $\frac{1}{x}$ est le rayon de celle qui passe par M. Chacune d'elles

coupe (S) suivant une surface (s) et (S) est engendrée par les variétés linéaires (Q) qui passent par les différents points de (s). Sur une variété Q^r fixe $\omega_3, \dots, \omega_{n-1}$ sont nuls et l'on a

$$(22) \quad \begin{cases} dM = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2, \\ dI_1 = \varpi_{12} I_2 + \alpha \omega_1 I_3 + \psi_1 I_n, \\ dI_2 = \varpi_{21} I_1 + \alpha \omega_2 I_3 + \psi_2 I_n, \\ dI_n = -\psi_1 I_1 - \psi_2 I_2. \end{cases}$$

Le ds^2 de la surface (s) tracée dans cet espace sphérique à trois dimensions de courbure α^2 est $\omega_1^2 + \omega_2^2$.

L'hypersurface (Σ) a une génération analogue à celle de (S) avec deux réseaux orthogonaux de variétés, les unes linéaires Q à $n - 3$ dimensions et les autres sphériques Q' à trois dimensions. Chaque variété Q' coupe (Σ) suivant une surface (σ). Pour l'applicabilité de (S) et de (Σ) il faut que les surfaces (s) et (σ) situées dans deux variétés Q^r et Q'^r de même courbure α soient applicables l'une sur l'autre, et il est évident que cela suffit. La recherche des hypersurfaces (Σ) applicables sur (S) revient donc ici à la recherche, dans un espace sphérique à trois dimensions de courbure α , des surfaces applicables sur une surface donnée.

LES HYPERSURFACES DÉFORMABLES DE LA SECONDE CATÉGORIE.

13. Supposons maintenant que les équations (16) se réduisent à une seule, ou, ce qui revient au même, que les équations

$$(23) \quad \omega_2 \varpi_{1r} - \omega_1 \varpi_{2r} \equiv \beta_r \omega_2^2 + (\gamma_r - \alpha_r) \omega_1 \omega_2 - \gamma_r \omega_1^2 = 0 \quad (r = 3, \dots, n-1),$$

sans être toutes des identités, se réduisent à une seule.

Cette équation unique est homogène et du second degré en ω_1, ω_2 et l'on peut se trouver encore dans deux cas différents, suivant que le premier membre est un carré parfait ou non.

Nous examinerons d'abord le premier cas. On peut profiter de l'indétermination des vecteurs tangents I_1, I_2 pour supposer que l'équation (23) se réduit à

$$\omega_1^2 = 0,$$

autrement dit qu'on a

$$(24) \quad \alpha_r = \beta_r, \quad \gamma_r = 0.$$

On a donc, d'après (16),

$$N = 0, \quad v = 0$$

et par suite, d'après (15),

$$M = \pm \mu;$$

on peut, du reste, toujours choisir le sens positif de la normale à (Σ) pour que M soit égal à μ ; on aura alors, par suite,

$$\Psi_2 = \psi_2.$$

On peut donc ajouter aux équations du système de Pfaff (11) la nouvelle équation

$$\Psi_2 - \psi_2 = 0.$$

Les covariants bilinéaires des premiers membres du nouveau système deviennent alors, en tenant compte de ce système,

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega'_r - \omega'_r \equiv 0, \\ \Omega'_n \equiv [\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)], \\ \Pi'_{12} - \varpi'_{12} \equiv \mu[\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)], \\ \Pi'_{1r} - \varpi'_{1r} \equiv 0, \\ \Pi'_{rs} - \varpi'_{rs} \equiv 0, \\ \Psi'_2 - \psi'_2 = [\varpi_{21}(\Psi_1 - \psi_1)], \\ \Psi'_r = -\alpha_r[\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)]. \end{array} \right.$$

Si ϖ_{12} est linéairement indépendante de ω_1 , les seconds membres des relations précédentes ne peuvent être nuls que si $\Psi_1 - \psi_1$ est nul. Dans ce cas les n -èdres attachés à (S) et (Σ) ont le même mouvement instantané et (Σ) est égale ou symétrique à (S) : l'hypersurface (S) est indéformable.

Si, au contraire, on a

$$(26) \quad \varpi_{12} = h\omega_1,$$

le système de Pfaff prolongé est en involution, et son intégrale générale dépend d'une fonction arbitraire d'un argument.

14. Les hypersurfaces (S) qui satisfont à la condition trouvée peuvent être définies d'une manière géométrique simple comme des lieux de variétés linéaires à $n - 2$ dimensions dépendant d'un paramètre.

Remarquons en effet que l'équation

$$\omega'_1 = [\omega_2 \varpi_{21}] + [\omega_3 \varpi_{31}] + \dots + [\omega_{n-1} \varpi_{n-1,1}]$$

peut s'écrire, grâce aux relations (24) et (26),

$$\omega'_1 = [\omega_1 \chi],$$

et que, par suite, l'équation $\omega_1 = 0$ est complètement intégrable. Cette équation définit donc sur (S) une famille à un paramètre de variétés à $n - 2$ dimensions; or, quand on se déplace sur une de ces variétés, c'est-à-dire quand on fait $\omega_1 = 0$, on a

$$\begin{aligned} dP_n &= -\psi_1 P_1, \\ dP_1 &= \psi_1 P_n; \end{aligned}$$

la variété linéaire d'intersection de P_n et P_1 reste donc fixe : c'est par suite la variété à $n - 2$ dimensions considérée.

Réciproquement, supposons que (S) soit le lieu d'une variété linéaire à $n - 2$ dimensions dépendant d'un paramètre. Les hyperplans tangents sont les hyperplans qui contiennent cette variété : ils dépendent donc de deux paramètres. En conservant les notations habituelles on peut supposer que la variété génératrice à $n - 2$ dimensions est l'intersection de P_n et de P_1 . Or, on a

$$\begin{aligned} dP_n &= -\psi_1 P_1 - \psi_2 P_2, \\ dP_1 &= \varpi_{12} P_2 + \varpi_{13} P_3 + \dots + \varpi_{1,n-1} P_{n-1} + \psi_1 P_n - \omega_1. \end{aligned}$$

Il faut que, si l'on tient compte de l'équation aux différentielles totales qui est vérifiée quand on se déplace sur une génératrice à $n - 2$ dimensions, les seconds membres de dP_1 et dP_n soient linéaires et homogènes en P_1 et P_n . Il faut, par suite, que cette équation aux différentielles totales soit $\omega_1 = 0$ et qu'elle entraîne

$$\psi_2 = \varpi_{12} = \varpi_{13} = \dots = \varpi_{1,n-1} = 0.$$

On a donc

$$\xi_r = 0, \quad \nu = 0,$$

et, comme μ n'est pas nul,

$$\alpha_r = \partial_r;$$

les relations (24) et (26) sont donc vérifiées, ce qu'il fallait démontrer.

15. Étudions d'un peu plus près la déformation des hypersurfaces précédentes. Le déplacement instantané du n -èdre attaché à l'hypersurface déformée (Σ) est facile à déterminer sans intégration. Les composantes de ce déplacement sont en effet les mêmes que pour (S) , à la seule exception de Ψ_1 , et l'on a évidemment

$$\Psi_1 - \psi_1 = \varphi \omega_1,$$

le coefficient φ dépendant naturellement d'une fonction arbitraire d'un argument. Or le premier membre $\Psi_1 - \psi_1$ est une différentielle exacte puisqu'on a

$$\psi'_1 = [\psi_2 \varpi_{21}] = 0, \quad \Psi'_1 = [\psi_2 \varpi_{21}] = 0;$$

le second membre est donc aussi une différentielle exacte. Or, l'équation $\omega_1 = 0$ admet pour intégrale le paramètre dont dépend la variété linéaire génératrice; si t est ce paramètre, on a donc

$$\Psi_1 = \psi_1 + f(t) dt,$$

$f(t)$ désignant une fonction *arbitraire* de t .

Cette fonction $f(t)$ étant fixée, la détermination de l'hypersurface (Σ) dépend de l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires, associé au groupe euclidien de l'espace à n dimensions. Si n est égal à 4, ce système, comme l'on sait, se ramène à deux équations de Riccati.

On peut se demander s'il ne serait pas possible de diriger les calculs de manière à avoir sans aucun signe d'intégration l'hypersurface (Σ) la plus générale applicable sur une hypersurface donnée (S) ; autrement dit, s'il serait possible d'exprimer les coordonnées d'un point de (Σ) par des formules dépendant d'une manière déterminée d'une fonction arbitraire d'un argument et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Il faut et il suffit pour cela que le système de Pfaff

$$(27) \quad \begin{cases} \Omega_r - \omega_r = 0 & (r = 1, \dots, n-1), \\ \Omega_n = 0, \\ \Pi_{rs} - \varpi_{rs} = 0 & (r, s = 1, \dots, n-1), \\ \Psi_2 - \psi_2 = 0, \\ \Psi_r = 0 & (r = 3, \dots, n-1) \end{cases}$$

jouisse de la propriété suivante : *chacun de ses systèmes dérivés*

successifs contient une seule équation de moins que le précédent.

Or, on a, en tenant compte de (24) et (26),

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega'_r - \omega'_r \equiv 0, \\ \Omega'_n \equiv [\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)], \\ \Pi'_{12} - \varpi'_{12} \equiv \mu[\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)], \\ \Pi'_{1s} - \varpi'_{1s} \equiv 0 \quad (s = 3, \dots, n-1), \\ \Pi'_{rs} - \varpi'_{rs} \equiv 0 \quad (r, s = 3, \dots, n-1), \\ \Psi'_2 - \psi'_2 \equiv -h[\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)], \\ \Psi'_r \equiv -\alpha_r[\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)] \quad (r = 3, \dots, n-1). \end{array} \right.$$

Par suite, le système dérivé de (27) est

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_r - \omega_r = 0 \quad (r = 1, \dots, n-1), \\ \Pi_{12} - \varpi_{12} - \mu\Omega_n = 0, \\ \Pi_{1s} - \varpi_{1s} = 0 \quad (s = 3, \dots, n-1), \\ \Pi_{rs} - \varpi_{rs} = 0 \quad (r, s = 3, \dots, n-1), \\ \Psi_2 - \psi_2 + h\Omega_n = 0 \\ \Psi_r + \alpha_r\Omega_n = 0 \quad (r = 3, \dots, n-1). \end{array} \right.$$

On a maintenant, en tenant compte de ces équations (28),

$$\begin{aligned} \Omega'_1 - \omega'_1 &\equiv -[\Omega_n(\Psi_2 - \mu\omega_2)], \\ \Omega'_2 - \omega'_2 &\equiv -[\Omega_n(\Psi_2 + \mu\omega_1)] = -2\mu[\Omega_n\omega_1]; \end{aligned}$$

ces deux formules suffisent à prouver que le système dérivé de (28) contient au moins deux équations de moins que (28).

C. Q. F. D.

16. Plaçons-nous à un autre point de vue en nous contentant de traiter le cas $n = 4$. Dans ce cas, la variété génératrice à deux dimensions $[P_4P_1]$ a, avec la variété infiniment voisine, un point commun M_0 que nous supposerons à distance finie, pour rester dans le cas général. Les formules

$$\begin{aligned} dP_4 &= -\psi_1P_1 - \psi_2P_2, \\ dP_1 &= h\omega_1P_2 + \alpha_3\omega_1P_3 + \psi_1P_4 - \omega_1 \end{aligned}$$

montrent que ce point M_0 est l'intersection des hyperplans $P_4, P_1,$

$$P_2, P_3 - \frac{1}{\alpha_3}.$$

On a donc

$$M_0 = M + \frac{1}{\alpha_3} I_3.$$

De là il résulte que le vecteur I_3 associé au point M contient le point M_0 et que la distance $MM_0 = \frac{1}{\alpha_3}$ se conserve par la déformation. On a de plus

$$dM_0 = d\left(M + \frac{1}{\alpha_3} I_3\right) = -\frac{\gamma_3}{\alpha_3} \omega_1 I_2 + \left(\omega_3 - \frac{d\alpha_3}{\alpha_3^2}\right) I_3;$$

les coefficients de I_2 et I_3 dans le second membre étant également des invariants dans la déformation, il en résulte que la droite MM_0 fait avec la tangente à la courbe lieu de M_0 [tangente qui se trouve dans la variété (P)] un angle invariant dans la déformation.

Si donc on se donne la courbe (C) lieu du point M_0 la variété génératrice qui correspond au point M_0 contient la tangente à la courbe (C) en ce point. Si l'on considère alors dans la variété (P) le système de coordonnées ayant pour origine le point M_0 et pour axes la tangente et la normale à (C), les coordonnées (x, y) d'un point M de l'hypersurface (S) par rapport à ce système sont des invariants dans la déformation. On peut choisir un 4-èdre $(M_0 K_1 K_2 K_3 K_4)$ attaché à la courbe (C) du point M_0 de manière à satisfaire aux formules de Frenet

$$\begin{aligned} \frac{dM_0}{ds} &= K_1, \\ \frac{dK_1}{ds} &= \rho K_2, \\ \frac{dK_2}{ds} &= -\rho K_1 + \sigma K_3, \\ \frac{dK_3}{ds} &= -\sigma K_2 + \tau K_4, \\ \frac{dK_4}{ds} &= -\tau K_3, \end{aligned}$$

où ρ, σ, τ sont les trois courbures de la courbe (C) et K_1, K_2, K_3, K_4 les vecteurs unités portés sur la tangente, la première normale principale, etc. On a alors, pour un point variable de (S),

$$M = M_0 + x K_1 + y (\alpha K_2 + \beta K_3 + \gamma K_4),$$

où α, β, γ sont des fonctions de l'arc s de (C) satisfaisant à

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

On trouve sans difficulté pour le carré de l'élément d'arc de (S)

$$dS^2 = [dx + (1 - \alpha\rho\gamma) ds]^2 + dy^2 + 2\alpha\rho x dy ds \\ + \{ [sx + (\alpha' - \beta\tau)\gamma]^2 + [(\beta' + \alpha\sigma - \gamma\tau)^2 + (\gamma' + \beta\tau)^2]\gamma^2 \} ds^2.$$

Dans la déformation x, y et s restent invariants; il faut donc que $\alpha\rho$ reste aussi constant et par suite le coefficient de ds^2 ; donc ρ reste constant ainsi que α . Si l'on désigne par les mêmes lettres, affectées de l'indice 1, les quantités correspondant à l'hyper-surface (Σ), on a

$$\alpha_1 = \alpha,$$

$$\rho_1 = \rho,$$

$$\beta_1\sigma_1 = \beta\sigma,$$

$$(\beta'_1 + \alpha\sigma_1 - \gamma_1\tau_1)^2 + (\gamma'_1 + \beta_1\tau_1)^2 = (\beta' + \alpha\sigma - \gamma\tau)^2 + (\gamma' + \beta\tau)^2.$$

Si, par exemple, on choisit pour τ_1 une fonction arbitraire de s , la quantité β_1 est déterminée et par suite γ_1 , et la dernière équation donne τ_1 . La courbe (C_1) est alors déterminée par ses trois courbures $\rho_1 = \rho$, σ_1 et τ_1 , mais sa détermination effective exige encore l'intégration de deux équations de Riccati, ce qui concorde avec le résultat général énoncé plus haut.

La discussion des cas particuliers se ferait sans difficulté.

LES HYPERSURFACES DÉFORMABLES DE LA TROISIÈME CATÉGORIE.

17. Revenons maintenant à l'équation (23) qui est une équation homogène et du second degré en ω_1 et ω_2 , et plaçons-nous dans le dernier cas qui nous reste à examiner, celui où le premier membre de cette équation n'est pas un carré parfait. Cette équation a une signification géométrique simple : elle exprime que la variété génératrice à $n - 3$ dimensions, intersection de P_n, P_1 et P_2 , a en commun avec la variété infiniment voisine une variété linéaire à $n - 4$ dimensions; ce qu'on peut exprimer plus brièvement en disant qu'elle a une enveloppe.

On a en effet

$$\begin{aligned} dP_n &= -\psi_1 P_1 - \psi_2 P_2, \\ dP_1 &= \varpi_{12} P_2 + \varpi_{13} P_3 + \dots + \varpi_{1,n-1} P_{n-1} + \psi_1 P_n - \omega_1, \\ dP_2 &= \varpi_{21} P_1 + \varpi_{23} P_3 + \dots + \varpi_{2,n-1} P_{n-1} + \psi_2 P_n - \omega_2. \end{aligned}$$

La caractéristique de la variété génératrice est donc l'intersection commune de cette variété avec les hyperplans

$$\begin{aligned} \varpi_{13} P_3 + \dots + \varpi_{1,n-1} P_{n-1} - \omega_1, \\ \varpi_{23} P_3 + \dots + \varpi_{2,n-1} P_{n-1} - \omega_2; \end{aligned}$$

pour qu'il y ait une enveloppe il faut et il suffit qu'on ait

$$\omega_1 \varpi_{2r} - \omega_2 \varpi_{1r} = 0 \quad (r = 3, \dots, n-1).$$

Cette condition géométrique se traduit évidemment par une équation différentielle du premier ordre et du second degré par rapport aux deux paramètres dont dépend l'hyperplan tangent, et l'on peut supposer que cette équation différentielle est

$$du \, dv = 0.$$

Il est alors facile de voir que l'hyperplan P_n satisfait à une équation de Laplace de la forme

$$(29) \quad \frac{\partial^2 P_n}{\partial u \partial v} + \alpha \frac{\partial P_n}{\partial u} + \beta \frac{\partial P_n}{\partial v} + \gamma P_n = 0;$$

il est du reste facile de le vérifier par le calcul.

L'intersection de P_1 et de P_2 ne dépend que de u et de v ; nous pourrions toujours choisir l'hyperplan P_1 lui-même de manière qu'il ne dépende que de u et de v ; il en sera de même de P_2 : cela revient à dire que ϖ_{12} est une combinaison linéaire de ω_1 et ω_2 . Posons

$$\varpi_{12} = h \, du + k \, dv,$$

et soit

$$(\omega_2 - p \, \omega_1)(\omega_2 - q \, \omega_1) = 0$$

l'équation (23) qui admet pour intégrales $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$

On peut poser

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a \, du + b \, dv, \\ \omega_2 &= p a \, du + q b \, dv, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \varpi_{1r} &= a_r \, du + b_r \, dv \\ \varpi_{2r} &= p a_r \, du + q b_r \, dv \end{aligned} \quad (r = 3, \dots, n-1).$$

Les relations

$$\begin{aligned} [\omega_1 \psi_1] + [\omega_2 \psi_2] &= 0, \\ [\varpi_1 r \psi_1] + [\varpi_2 r \psi_2] &= 0 \end{aligned}$$

permettent enfin de poser

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -q m du - p n dv, \\ \psi_2 &= m du + n dv. \end{aligned}$$

La formule

$$dP_n = -\psi_1 P_1 - \psi_2 P_2$$

et l'hypothèse que P_n, P_1, P_2 ne dépendent que de u et v montrent que les coefficients de du, dv dans ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions de u et v seuls; les quantités p, q, m, n sont donc des fonctions de u et de v seulement.

Cela posé, on a

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{\partial P_n}{\partial u} = m(q P_1 - P_2), \\ \frac{\partial P_n}{\partial v} = n(p P_1 - P_2); \end{cases}$$

d'autre part, les formules

$$\begin{aligned} dP_1 &= - (a du + b dv) + (h du + k dv) P_2 \\ &\quad + \sum_{r=3}^{r=n-1} (a_r du + b_r dv) P_r - (q m du + p n dv) P_n, \\ dP_2 &= - (p a du + q b dv) - (h du + k dv) P_1 \\ &\quad + \sum_{r=3}^{r=n-1} (p a_r du + q b_r dv) P_r + (m du + n dv) P_n \end{aligned}$$

montrent que

$$\frac{\partial P_2}{\partial v} - q \frac{\partial P_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial P_2}{\partial u} - p \frac{\partial P_1}{\partial u}$$

ne dépendent que de P_1, P_2, P_n , ou encore que $\frac{\partial^2 P_n}{\partial u \partial v}$ est linéaire en $\frac{\partial P_n}{\partial u}, \frac{\partial P_n}{\partial v}, P_n$.

La réciproque est du reste évidente.

Quant aux coefficients α, β, γ , de l'équation (29), on peut les calculer, soit en dérivant la première équation (30) par rapport à v , soit en dérivant la deuxième équation (30) par rapport à u ; on

obtient ainsi les relations

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma - mn(1 + pq) = 0, \\ mx + n\beta - mkq + \frac{\partial m}{\partial v} = 0, \\ mqx + np\beta - mk + \frac{\partial(mq)}{\partial v} = 0, \\ mx + n\beta - nhp + \frac{\partial n}{\partial u} = 0, \\ mqx + np\beta - nh + \frac{\partial(np)}{\partial u} = 0. \end{array} \right.$$

18. Arrivons maintenant au problème de la déformation de (S). Quand on passe de (S) à (Σ) les coefficients a, b, a_r, b_r, p, q de du et dv dans $\omega_1, \omega_2, \varpi_{1r}, \varpi_{2r}$, restent les mêmes; les coefficients m et n qui entrent dans ψ_1 et ψ_2 sont remplacés par d'autres μ et ν , fonctions, comme m et n , de u et v seulement, et la formule

$$[\Psi_1 \Psi_2] = [\psi_1 \psi_2]$$

devient

$$\mu\nu = mn,$$

ce qui permet de poser

$$\mu = tm, \quad \nu = \frac{1}{t}n,$$

t étant une fonction inconnue de u, v . C'est à la recherche de cette fonction que revient le problème de la déformation, la détermination de (Σ) revenant à l'intégration du système de Pfaff

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_r = \omega_r & (r = 1, 2, \dots, n-1), \\ \Omega_n = 0, \\ \Pi_{rs} = \varpi_{rs} & (r, s = 1, \dots, n-1), \\ \Psi_i = 0 & (i = 3, \dots, n-1), \\ \Psi_1 = -qtm du - \frac{p}{t}n dv, \\ \Psi_2 = tm du + \frac{n}{t}dv. \end{array} \right.$$

Les covariants bilinéaires des deux membres des équations (32) sont certainement égaux en tenant compte de (32), à l'exception des deux dernières équations. Pour ces deux équations on obtient.

en égalant les covariants bilinéaires des deux membres,

$$\left[\frac{\partial(mq)}{\partial v} + mk \right] t - \left[\frac{\partial(np)}{\partial u} + hn \right] \frac{1}{t} + mq \frac{\partial t}{\partial v} + np \frac{1}{t^2} \frac{\partial t}{\partial u} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial m}{\partial v} - mkq \right] t - \left[\frac{\partial n}{\partial u} - nhp \right] \frac{1}{t} + m \frac{\partial t}{\partial v} + n \frac{1}{t^2} \frac{\partial t}{\partial u} = 0.$$

Comparées aux équations (31), ces équations donnent immédiatement

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \left(t - \frac{1}{t} \right) \alpha, \quad \frac{1}{t^2} \frac{\partial t}{\partial u} = \left(t - \frac{1}{t} \right) \beta,$$

ou encore, en posant $t^2 = \theta$,

$$(33) \quad \frac{1}{2} \frac{d\theta}{\theta - 1} = \theta \beta du + \alpha dv.$$

En résumé, le problème de la déformation de l'hypersurface (S) enveloppe de l'hyperplan à deux paramètres (P_n) qui satisfait à l'équation de Laplace (29), se ramène à l'intégration de l'équation aux différentielles totales (33), où α et β sont les coefficients qui s'introduisent dans l'équation de Laplace.

19. Cela posé, trois cas peuvent se présenter :

Ou bien l'équation (33) n'admet aucune solution (distincte de $\theta = 1$) : dans ce cas l'hypersurface (S) est indéformable.

Ou bien l'équation (33) est complètement intégrable : alors l'hypersurface (S) admet une déformation continue dépendant essentiellement d'un paramètre [c'est-à-dire que les hypersurfaces (Σ) applicables sur (S) ne dépendent que d'un paramètre, abstraction faite de leur déplacement possible dans l'espace].

Ou bien l'équation (33) admet une intégrale et une seule autre que $\theta = 1$: alors l'hypersurface (S) est applicable sur une autre hypersurface particulière (S'), mais sans admettre de déformation continue.

Nous allons nous borner à étudier le cas où l'hypersurface (S) admet une déformation continue (*hypersurfaces déformables de la troisième catégorie*).

Il faut et il suffit pour cela que le covariant bilinéaire du second membre de l'équation (33) soit nul en tenant compte de cette

équation elle-même, ce qui donne

$$-2(\theta-1)\alpha\beta[du\,dv] + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial u} - \theta\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)[du\,dv] = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u} = \frac{\partial\beta}{\partial v} = -2\alpha\beta.$$

On voit donc déjà que l'équation de Laplace (29) est à *invariants égaux*. On trouve ensuite facilement

$$(34) \quad \alpha = -\frac{1}{2} \frac{V'}{U-V}, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{U'}{U-V},$$

U et V désignant deux fonctions arbitraires, la première de u , la seconde de v . L'équation (33) s'intègre aisément et donne

$$\theta = \frac{C-V}{C-U},$$

où C est une constante arbitraire.

En résumé, *pour que l'hypersurface (S), enveloppe de l'hyperplan P_n satisfaisant à l'équation (29), admette une déformation continue, il faut et il suffit que les coefficients α et β de l'équation (29) soient de la forme*

$$\alpha = -\frac{1}{2} \frac{V'}{U-V}, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{U'}{U-V};$$

les composantes du déplacement instantané du n-èdre attaché à l'hypersurface déformée (Σ) sont alors connues sans intégration : ce sont les mêmes que pour (S), sauf que dans ψ_1 et ψ_2 les coefficients m et n sont remplacés respectivement par

$$m\sqrt{\frac{C-V}{C-U}}, \quad n\sqrt{\frac{C-U}{C-V}},$$

où C désigne une constante arbitraire. L'hypersurface (S) elle-même correspond à $C = \infty$.

En retranchant de la troisième équation (31), la deuxième multipliée par q , on voit que $\frac{n}{m}\beta$ reste invariant dans la déformation : il en est de même pour $\frac{m}{n}\alpha$. Par suite, quand on passe de (S) à (Σ), les coefficients α et β de l'équation de Laplace (29) sont remplacés

par $\frac{\alpha}{\theta}$ et $\beta\theta$. Si donc l'hyperplan Q_n tangent à (Σ) satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 Q_n}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \frac{V'_1}{U_1 - V_1} \frac{\partial Q_n}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{U'_1}{U_1 - V_1} \frac{\partial Q_n}{\partial v} + \gamma_1 f = 0,$$

on a

$$\gamma_1 = \gamma, \quad \frac{V'_1}{U_1 - V_1} = \frac{C - U}{C - V} \frac{V'}{U - V}, \quad \frac{U'_1}{U_1 - V_1} = \frac{C - V}{C - U} \frac{U'}{U - V},$$

d'où

$$U_1 - V_1 = \frac{C'(U - V)}{(C - U)(C - V)} = \frac{C'}{C - U} - \frac{C'}{C - V},$$

d'où enfin

$$U_1 = \frac{C'}{C - U} + C'', \quad V_1 = \frac{C'}{C - V} + C'';$$

autrement dit les fonctions U_1 et V_1 résultent de U et V par une même transformation homographique à coefficients constants.

20. Ce qui précède suppose connus les paramètres u et v ainsi que les fonctions U et V . Il est facile de voir que si l'hyper-surface (S) est donnée d'une manière quelconque, on peut connaître U et V par de simples quadratures. En effet, on a d'abord p et q par la résolution d'une équation du second degré; le calcul de

$$\psi_1 + p\psi_2 \quad \text{et} \quad \psi_1 + q\psi_2$$

fait alors connaître les expressions

$$m du, \quad n dv;$$

la formule

$$\varpi_{12} = h du + k dv = \frac{h}{m} m du + \frac{k}{n} n dv$$

nous permet de calculer immédiatement $\frac{h}{m}$ et $\frac{k}{n}$.

Connaissant $m du$, $n dv$, on en déduit par des opérations élémentaires les trois expressions bilinéaires

$$mn[du dv], \quad \frac{\partial m}{\partial v}[du dv], \quad \frac{\partial n}{\partial u}[du dv]$$

et par suite les deux fonctions

$$\frac{1}{mn} \frac{\partial m}{\partial v}, \quad \frac{1}{mn} \frac{\partial n}{\partial u};$$

on a de la même manière

$$\frac{1}{mn} \frac{\partial(mq)}{\partial v}, \quad \frac{1}{mn} \frac{\partial(np)}{\partial u}.$$

D'après cela les équations (31) montrent que

$$\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{m} \quad \text{et} \quad q \frac{\alpha}{n} + p \frac{\beta}{m}$$

sont connus et par suite $\frac{\alpha}{n}$ et $\frac{\beta}{m}$; on en déduit enfin

$$\frac{\alpha}{n} n \, dv = \alpha \, dv,$$

$$\frac{\beta}{m} m \, du = \beta \, du.$$

Cela posé, on a

$$\alpha \, dv + \beta \, du = \frac{1}{2} \frac{U' \, du - V' \, dv}{U - V};$$

on a donc par une quadrature

$$U - V = e^{2 \int \alpha \, dv + \beta \, du}.$$

On a ensuite

$$U' \, du = 2 \beta \, du (U - V) = 2 \beta \, du e^{2 \int \alpha \, dv + \beta \, du},$$

d'où

$$U = 2 \int \beta \, du e^{2 \int \alpha \, dv + \beta \, du}$$

par une nouvelle quadrature.

Si α et β ne sont nuls ni l'un ni l'autre, U et V sont de vraies fonctions et, en les égalant à des constantes, on a les intégrales de l'équation (23). Si α n'est pas nul, mais si β l'est, on a V par une quadrature, mais aucune simplification n'est apportée dans la recherche de u .

21. On peut exprimer sous une forme encore plus simple les résultats du n° 19. Posons

$$P_n = \frac{P'_n}{\sqrt{U - V}}.$$

On obtient par un calcul facile

$$\frac{\partial^2 P'_n}{\partial u \partial v} + \left[\gamma - \frac{1}{4} \frac{U' V'}{(U - V)^2} \right] P'_n = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 P'_n}{\partial u \partial v} + \gamma' P'_n = 0.$$

L'équation correspondante pour (Σ) est la même.

Par suite, les hypersurfaces (S) admettant une déformation continue s'obtiennent comme enveloppe d'hyperplans dépendant de deux paramètres, lorsque les coordonnées tangentielles de ces hyperplans satisfont à une même équation de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \gamma' f = 0,$$

et que de plus la somme des carrés des n premières coordonnées tangentielles est la différence $U - V$ entre une fonction U de u seul et une fonction V de v seul. Pour toute hypersurface (Σ) résultant de la déformation de (S) , l'équation aux dérivées partielles est la même, mais les deux fonctions U et V subissent une même transformation homographique à coefficients constants.

22. Un cas particulièrement simple est celui où γ' est nul. On obtient alors l'hypersurface (S) déformable comme enveloppe de l'hyperplan

$$(U_1 - V_1)x_1 + (U_2 - V_2)x_2 + \dots + (U_n - V_n)x_n + U_{n+1} - V_{n+1} = 0,$$

les fonctions U_i, V_i satisfaisant à l'identité

$$U'_1 V'_1 + U'_2 V'_2 + \dots + U'_n V'_n = 0;$$

on voit alors sans peine que ces hypersurfaces sont les enveloppes des hyperplans

$$(35) \quad U_1 x_1 + \dots + U_p x_p + V_1 y_1 + \dots + V_q y_q = U_{p+1} + V_{q+1},$$

où $U_1, \dots, U_{p+1}$ sont des fonctions arbitraires de u et $V_1, \dots, V_{q+1}$ des fonctions arbitraires de v . On a de plus $p + q \leq n$ et $x_1, \dots, y_q$ sont $p + q$ coordonnées rectangulaires dans l'espace à n dimensions.

Considérons $n - 1$ hyperplans passant par M, rectangulaires entre eux et sur l'hyperplan tangent. On peut prendre pour ces $n - 1$ hyperplans, en s'appuyant sur les formules précédentes, les hyperplans suivants :

$$Q_1 - w \frac{dr}{du}, \quad Q_i - \xi_i \quad (i = 2, \dots, p-1),$$

$$R_1 + w \frac{ds}{dv}, \quad R_i - \tau_i \quad (i = 2, \dots, q-1),$$

$$\frac{r(Q - rw) - s(R + sw)}{\sqrt{r^2 + s^2}} \equiv \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} Q - \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}} R - \sqrt{r^2 + s^2} w,$$

où w , ξ_i , τ_j sont des variables auxiliaires.

Les formules (1') montrent que $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ s'obtiennent en calculant les différentielles de ces $n - 1$ hyperplans et en donnant aux seconds membres les valeurs qu'elles prennent au point M. On a ainsi, au point M, d'après (37) et (38),

$$(39) \left\{ \begin{array}{l} d' \left(Q_1 - w \frac{dr}{du} \right) = - \frac{dr}{du} dw + \left(\alpha_1 \xi_2 - w r + \frac{d^2 r}{du^2} \right) du, \\ d(Q_2 - \xi_2) = - d\xi_2 + \left(\alpha_2 \xi_3 - \alpha_1 w \frac{dr}{du} \right) du, \\ \dots\dots\dots, \\ d(Q_{p-1} - \xi_{p-1}) = - d\xi_{p-1} + (\alpha_{p-1} - \alpha_{p-2} \xi_{p-2}) du, \\ d \left(R_1 + w \frac{ds}{dv} \right) = \frac{ds}{dv} dw + \left(\beta_1 \tau_2 + w s + \frac{d^2 s}{dv^2} \right) dv, \\ d(R_1 - \tau_2) = - d\tau_2 + \left(\beta_2 \tau_3 + \beta_1 w \frac{ds}{dv} \right) dv, \\ \dots\dots\dots, \\ d(R_{q-1} - \tau_{q-1}) = - d\tau_{q-1} + (\beta_{q-1} - \beta_{q-2} \tau_{q-2}) dv, \\ d \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} Q - \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}} R - \sqrt{r^2 + s^2} w \right) = w d(\sqrt{r^2 + s^2}). \end{array} \right.$$

Les seconds membres de ces équations restent invariants si l'on pose

$$w' = w,$$

$$\xi'_2 = \xi_2, \quad \dots, \quad \xi'_{p-1} = \xi_{p-1},$$

$$\tau'_2 = \tau_2, \quad \dots, \quad \tau'_{q-1} = \tau_{q-1}$$

et

$$r \, du = r' \, du', \quad \frac{dr}{du} = \frac{dr'}{du'}, \quad \text{d'où} \quad r' = \sqrt{r^2 + C}, \quad du' = \frac{r}{\sqrt{r^2 + C}} \, du,$$

$$s \, dv = s' \, dv', \quad \frac{ds}{dv} = \frac{ds'}{dv'}, \quad \text{d'où} \quad s' = \sqrt{s^2 + C'}, \quad dv' = \frac{s}{\sqrt{s^2 + C'}} \, dv,$$

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \dots = \frac{x_{p-1}'}{x_{p-1}} = \frac{du}{du'} = \frac{r'}{r},$$

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2} = \dots = \frac{y_{q-1}'}{y_{q-1}} = \frac{dv}{dv'} = \frac{s'}{s},$$

$$r'^2 + s'^2 = r^2 + s^2, \quad \text{d'où} \quad C' = -C.$$

Il s'introduit ainsi une constante arbitraire C ; cette constante étant donnée, l'élément d'arc et les courbures de la courbe dont l'hyperplan Q' (qui remplace l'hyperplan Q dans la déformation) est l'hyperplan osculateur sont connus; il en est de même pour la courbe dont R' est l'hyperplan osculateur; enfin r' et s' sont connus également. On est ainsi ramené à déterminer dans deux espaces, l'un à p dimensions, l'autre à q dimensions, deux courbes connaissant leur élément d'arc et leurs courbures.

Le cas particulier où q par exemple serait égal à 1 se traite sans difficulté.

23. Nous ne nous sommes pas préoccupés dans ce qui précède de la réalité des racines p et q de l'équation (20). Si elles sont imaginaires, les paramètres u et v peuvent être supposés imaginaires conjugués. Si l'on ne veut conserver que des paramètres réels, l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \gamma' f = 0$$

doit être remplacée par une équation de la forme

$$(40) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \gamma' f = 0.$$

Il est facile de voir que ce cas ne peut se présenter que si la fonction γ' est essentiellement positive. Soient en effet

$$c_1, \dots, c_n$$

les n premières coordonnées tangentielles qui satisfont à l'équa-

tion (40), la somme de leurs carrés satisfaisant à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

On a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) (c_1^2 + \dots + c_n^2) = 2 \sum_{i=1}^{i=n} \left[\left(\frac{\partial c_i}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial c_i}{\partial v} \right)^2 \right] - 2 \gamma' \sum_{i=1}^{i=n} c_i^2,$$

ce qui met la proposition en évidence.

24. Un cas particulier est à signaler ici, c'est celui où l'équation (23) se réduit à

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 0;$$

dans ce cas, les hyperplans $\frac{\partial P_n}{\partial u}, \frac{\partial P_n}{\partial v}$ sont *isotropes*. L'équation

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial u \partial v} + \alpha \frac{\partial P_n}{\partial v} + \beta \frac{\partial P_n}{\partial v} + \gamma P_n = 0$$

exige alors que $\alpha = \beta = 0$; en effet, de

$$\frac{\partial P_n}{\partial u} \Big| \frac{\partial P_n}{\partial u} = 0 \quad (1),$$

on déduit

$$\frac{\partial P_n}{\partial u} \Big| \frac{\partial^2 P_n}{\partial u \partial v} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\beta \frac{\partial P_n}{\partial u} \Big| \frac{\partial P_n}{\partial v} = 0, \quad \text{d'où} \quad \beta = 0,$$

et l'on a de même $\alpha = 0$.

Les conditions de déformabilité de l'hypersurface, à savoir

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \beta}{\partial v} = -2 \alpha \beta,$$

(1) Le symbole $P \Big| Q$, où P désigne l'expression

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha$$

et Q l'expression

$$\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n + \beta,$$

est employé pour désigner la quantité $\alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n$, c'est-à-dire le produit géométrique des vecteurs normaux $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

sont donc vérifiées d'elles-mêmes, l'équation (33) se réduisant à

$$d\theta = 0.$$

Si l'on conserve des paramètres réels, l'hyperplan tangent satisfera à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial v^2} + \gamma P_n = 0$$

avec la double condition

$$\left. \frac{\partial P_n}{\partial u} \right| \frac{\partial P_n}{\partial u} = \left. \frac{\partial P_n}{\partial v} \right| \frac{\partial P_n}{\partial v}, \quad \left. \frac{\partial P_n}{\partial u} \right| \frac{\partial P_n}{\partial v} = 0.$$

25. Prenons comme exemple, dans l'espace à quatre dimensions, l'enveloppe (S) de l'hyperplan

$$P_n \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [x_1 \cos u + x_2 \sin u + x_3 \cos v + x_4 \sin v - f(u, v)] = 0,$$

où f satisfait à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + f = 0.$$

On obtient une hypersurface (Σ) applicable sur (S) en prenant l'enveloppe de l'hyperplan

$$Q_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [(x'_1 \cos u_1 + x'_2 \sin u_1 + x'_3 \cos v_1 + x'_4 \sin v_1 - f_1(u_1, v_1))] = 0,$$

où l'on a posé

$$u_1 = u \cos \frac{\alpha}{2} - v \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$v_1 = u \sin \frac{\alpha}{2} + v \cos \frac{\alpha}{2},$$

α étant une constante arbitraire et où f_1 est choisie de manière qu'il existe une solution H de l'équation

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} + H = \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial v_1^2} + H = 0,$$

satisfaisant à la fois à

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial v_1} = f(u, v), \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} = f_1(u_1, v_1).$$

SUR LES FONCTIONS CONJUGUÉES;

PAR M. I. PRIWALOFF.

Considérons une fonction d'une variable complexe $F(z)$, holomorphe à l'intérieur d'un cercle C de rayon 1.

Soit

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y);$$

U et V étant deux fonctions harmoniques conjuguées régulières à l'intérieur du cercle C .

Désignons par $f(\theta)$ et $g(\theta)$ les valeurs de ces fonctions sur la circonférence du cercle C .

M. Fatou a démontré que, si $f(\theta)$ satisfait à une condition de Lipschitz, $g(\theta)$ satisfait à une condition de même forme ⁽¹⁾. Le but de cette Note est de préciser le résultat de M. Fatou et de démontrer la proposition suivante :

Si la fonction $f(\theta)$ satisfait à une condition de Lipschitz à exposant $\alpha \neq 1$,

$$(L) \quad |f(\theta + \varphi) - f(\theta)| < K |\varphi|^\alpha,$$

la fonction conjuguée $g(\theta)$ satisfait à une condition de même forme, l'exposant ayant la même valeur α .

Si $f(\theta)$ est à nombres dérivés bornés, c'est-à-dire si $\alpha = 1$, la fonction $g(\theta)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'exposant aussi voisin qu'on voudra de 1.

Nous partirons de la formule

$$g(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(t) - f(\theta)] \cot \frac{t - \theta}{2} dt,$$

établie par M. Fatou et nous reprendrons sa démonstration en précisant une de ses inégalités.

⁽¹⁾ *Acta mathematica*, t. XXX, p. 361.

Donnant à θ l'accroissement $\Delta\theta$, nous aurons

$$\begin{aligned} g(\theta + \Delta\theta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(t) - f(\theta + \Delta\theta)] \cot \frac{t - \theta - \Delta\theta}{2} dt, \\ (1) \quad g(\theta + \Delta\theta) - g(\theta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{f(t) - f(\theta + \Delta\theta)}{\operatorname{tang} \frac{t - \theta - \Delta\theta}{2}} - \frac{f(t) - f(\theta)}{\operatorname{tang} \frac{t - \theta}{2}} \right] dt. \end{aligned}$$

La fonction sous le signe $\int$ peut s'écrire

$$(2) \quad \frac{f(t) - f(\theta + \Delta\theta)}{\sin \frac{t - \theta}{2} \sin \frac{t - \theta - \Delta\theta}{2}} \sin \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{f(\theta) - f(\theta + \Delta\theta)}{\operatorname{tang} \frac{t - \theta}{2}}.$$

Intégrons d'abord de $-\pi$ à $\theta - \varepsilon$ et de $\theta + \varepsilon$ à $+\pi$, en supposant

$$\varepsilon = 3|\Delta\theta|.$$

En appliquant la condition (L) on a les inégalités

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(t) - f(\theta + \Delta\theta)}{\sin \frac{t - \theta}{2} \sin \frac{t - \theta - \Delta\theta}{2}} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right| &< K_1 \frac{|t - \theta - \Delta\theta|^\alpha |\Delta\theta|}{|t - \theta| |t - \theta - \Delta\theta|} \\ &= K_1 \frac{|\Delta\theta|}{|t - \theta| |t - \theta - \Delta\theta|^{1-\alpha}} \\ &= K_1 \frac{|\Delta\theta|}{|t - \theta|^{2-\alpha} \left(\left| 1 - \frac{\Delta\theta}{t - \theta} \right| \right)^{1-\alpha}} \\ &< K_2 \frac{|\Delta\theta|}{|t - \theta|^{2-\alpha}}; \end{aligned}$$

$\frac{1}{\left| 1 - \frac{\Delta\theta}{t - \theta} \right|}$ étant borné dans les intervalles $(-\pi, \theta - \varepsilon)$ et $(\theta + \varepsilon, +\pi)$.

Par conséquent le premier terme de (2), intégré de $-\pi$ à $\theta - \varepsilon$ et de $\theta + \varepsilon$ à $+\pi$, donnera pour l'intégrale (1) une contribution moindre en valeur absolue que

$$\begin{aligned} C_1 |\Delta\theta|^\alpha & \quad \text{si } \alpha \neq 1 \quad (1), \\ C'_1 |\Delta\theta| \log \frac{1}{|\Delta\theta|} & \quad \text{si } \alpha = 1. \end{aligned}$$

(1) Nous prenons $\alpha < 1$ parce que, dans le cas $\alpha > 1$, la fonction se réduit à une constante.

Le second terme de (2), intégré entre les mêmes limites, donnera comme résultat zéro.

Il nous reste à évaluer la limite supérieure de l'intégrale (1) quand les limites d'intégration sont $\theta - \varepsilon$ et $\theta + \varepsilon$. En tenant encore compte de la relation (L), on trouve facilement que les termes ainsi obtenus ont une somme moindre en valeur absolue que

$$C_2 |\Delta\theta|^\alpha, \quad \text{quel que soit } \alpha.$$

On a donc, en définitive,

$$|g(\theta + \Delta\theta) - g(\theta)| < (C_1 + C_2) |\Delta\theta|^\alpha \quad \text{si } \alpha \neq 1$$

et

$$|g(\theta + \Delta\theta) - g(\theta)| < C_1 |\Delta\theta| \log \frac{1}{|\Delta\theta|} + C_2 |\Delta\theta| < C |\Delta\theta|^{1-\gamma_1} \quad \text{si } \alpha = 1,$$

$\gamma_1 > 0$ étant aussi petit qu'on voudra.

C. Q. F. D.

En terminant, démontrons que, dans le cas $\alpha = 1$, l'exposant α de la condition de Lipschitz, pour la fonction conjuguée, peut être en réalité différent de 1.

Posons

$$f(\theta) = \sum_1^\infty \frac{a_n \cos n\theta}{n^2},$$

où

$$a_1 > a_2 > a_3 \dots \quad \text{et} \quad \lim_{n=\infty} a_n = 0.$$

Supposons

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{n} = +\infty.$$

La fonction $f(\theta)$, déterminée de cette manière, a une dérivée continue $f'(\theta)$:

$$f'(\theta) = \frac{df}{d\theta} = - \sum_1^\infty \frac{a_n \sin n\theta}{n};$$

la série dans le membre de droite étant uniformément convergente.

La fonction conjuguée

$$g(\theta) = - \sum_1^\infty \frac{a_n \sin n\theta}{n^2}$$

ne satisfera pas à une condition de Lipschitz à exposant égal à 1.

En effet, dans le cas contraire

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_n \cos n\theta}{n}$$

serait une série de Fourier d'une fonction bornée, ce qui est contradictoire à la supposition

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n} = +\infty.$$

SUR L'INTERPOLATION DES FONCTIONS ENTIÈRES :

PAR M. G. VALIRON.

Je démontrerai dans ce qui suit quelques propositions relatives à la croissance des fonctions entières obtenues par interpolation. Soit a_n le $n^{\text{ième}}$ nombre d'une suite infinie de nombres tous différents, rangés par ordre de modules non décroissants et tels que

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{a_n} = 0;$$

désignons par $F(z)$ un produit canonique ayant pour zéros les nombres a_n ⁽¹⁾ et par $M(r)$ le maximum du module de $F(z)$ pour $|z| = r$. Considérons une suite quelconque de nombres

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots;$$

on sait qu'il existe des fonctions entières $f(z)$ vérifiant pour chaque valeur de n l'égalité

$$f(a_n) = A_n;$$

de plus, les méthodes de M. Borel montrent que, lorsque la suite

(1) Si $F(z)$ est d'ordre infini on prendra la définition du produit canonique donnée par M. Denjoy dans sa thèse.

des nombres A_n a une croissance plus rapide que la suite des nombres $M(r_n)$ ($r_n = |a_n|$), on peut former des fonctions $f(z)$ dont la croissance est en relations assez étroites avec celle de la suite des nombres A_n , tout au moins dans le cas où $F(z)$ est d'ordre fini et où les zéros a_n sont distribués de façon ordinaire ⁽¹⁾.

Je me placerai dans le cas où les nombres A_n croissent moins vite que les nombres $M(r_n)$ et je supposerai l'ordre ρ de $F(z)$ inférieur à $\frac{1}{2}$. On sait que les fonctions d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$ jouissent d'une propriété exprimée par un théorème de M. Wiman qui les rend assez comparables aux polynômes; les résultats obtenus avec ces fonctions doivent donc être particulièrement simples. J'ai obtenu les propositions suivantes :

I. Pour qu'il existe une fonction $f(z)$ vérifiant l'inégalité

$$|f(z)| < [M(r)]^{1-\alpha \cos \pi \rho} \quad (\alpha > 0),$$

il est nécessaire que les nombres A_n satisfassent à une infinité de conditions d'espèce linéaire.

II. Lorsque les nombres r_n satisfont à certaines conditions de régularité, les conditions imposées aux A_n prennent la forme

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{F'(a_n)} a_n^p = 0 \quad (p = 1, 2, \dots)$$

et réciproquement les égalités (1) jointes aux inégalités

$$A_n < [M(r_n)]^{1-\alpha \cos \pi \rho}$$

entraînent l'inégalité

$$|f(z)| < [M(r)]^{1-\alpha_1 \cos \pi \rho_1} \quad (\rho_1 = \rho + \varepsilon)$$

pour une fonction $f(z)$ et une seule.

Les égalités (1) sont la généralisation de celles qui expriment l'abaissement du degré dans l'interpolation des polynômes et il y a lieu de rechercher si elles n'expriment pas une propriété ana-

(1) Voir E. BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes*.

logue et si les seules conditions

$$A_n = M(r_n)$$

n'entraînent pas l'existence d'une fonction $f(z)$ croissant moins vite que $M(r)$, mais peut-être plus vite que $M(r)^{\cos \pi \rho}$. Je montrerai sur un exemple simple qu'il n'en est rien.

I. Les notations étant les mêmes que ci-dessus, désignons par $\mu(r)$ le maximum pour chaque valeur de r de l'expression

$$\frac{r^n}{r_1 r_2 \dots r_n},$$

lorsqu'on donne à r toutes les valeurs entières, un théorème bien connu de M. Jensen montre immédiatement qu'il ne peut exister deux fonctions $f(z)$ pour lesquelles le quotient

$$\frac{|f(z)|}{\mu(r)}$$

a pour limite zéro lorsque r croît indéfiniment ⁽¹⁾. Comme $\mu(r)$ est en relation simple avec la fonction $M(r)$ dans le cas où $F(z)$ est à croissance régulière, on pourra tirer de la propriété précédente des propositions relatives à l'unicité des solutions $f(z)$ jouissant de certaines propriétés de croissance ⁽²⁾. Dans le cas où $F(z)$ est d'ordre ρ inférieur à $\frac{1}{2}$ la proposition précédente est remplacée par la suivante :

Il ne peut exister deux fonctions $f(z)$ pour lesquelles le

(1) Car s'il existait deux telles fonctions $f(z)$, leur différence $h(z)$ s'annulerait pour $z = a_n$ et peut-être pour d'autres valeurs $b_1, b_2, \dots, b_p, \dots$, et q fois pour $z = 0$; par suite, le maximum du module de $h(z)$ serait supérieur à

$$x_q \frac{r^{q+n+p}}{r_1 r_2 \dots r_n \cdot |b_1| \cdot |b_2| \dots |b_p|}$$

[x_q étant le coefficient de z^q dans $h(z)$] et par suite à

$$x_q \mu(r),$$

ce qui est impossible.

(2) Par exemple la première partie du théorème III de M. Polya dans son Mémoire *Ueber Ganzwertige ganze Funktionen* (Rendiconti di Palermo, t. XL, p. 1).

quotient

$$\frac{|f(z)|}{M(r)}$$

a pour limite zéro lorsque r croît indéfiniment.

En effet, s'il existait deux telles fonctions $f(z)$, leur différence s'annulerait pour les zéros de $F(z)$; donc serait le produit de $F(z)$ par une fonction $\varphi(z)$ et l'on aurait

$$|F(z)\varphi(z)| < \alpha M(r),$$

quelque petit que soit α pourvu que r soit assez grand. Cette inégalité est impossible en supposant $\varphi(z)$ d'ordre ρ_1 supérieur à ρ , car d'après un théorème sur le minimum du module des fonctions entières $|F(z)|$ est supérieur à

$$e^{-r^{\rho+\beta}} \quad (\beta < \rho_1 - \rho),$$

à l'extérieur d'un cercle $|z| = R_0$ et des cercles ayant pour centres les points a_n et pour rayons r_n^{-k} (k fini), et par suite on voit sans peine qu'il existera des points z pour lesquels on aura simultanément

$$|F(z)| \geq e^{-r^{\rho+\beta}}, \quad |\varphi(z)| > e^{+r^{\rho'+\beta'}} \quad (\beta' > \beta),$$

ce qui conduit à une impossibilité. Supposons donc que $\varphi(z)$ soit d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$; alors, d'après un théorème de M. Wiman, il existera des cercles $|z| = r$ sur lesquels $\varphi(z)$ sera supérieur à un nombre donné quelconque Λ , le rayon de ces cercles pouvant dépasser tout nombre donné et l'on arrivera encore à une contradiction (1).

On remarquera qu'il résulte de la démonstration précédente que, dans le cas de l'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$, le produit canonique est la moins croissante des fonctions entières ayant des zéros donnés,

(1) Pour le théorème de M. Wiman voir ma Thèse *Sur les fonctions entières...* (Annales de la Faculté de Toulouse, 1913, p. 213), où l'on trouvera les indications bibliographiques et la démonstration du théorème sous la forme qui sera utilisée plus loin.

propriété qui n'est pas nécessairement vraie lorsque l'ordre dépasse $\frac{1}{2}$ ⁽¹⁾.

2. Nous supposons dorénavant que $F(z)$ est d'ordre ρ inférieur à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |a_n|}{\log n} = \frac{1}{\rho} > \frac{1}{2};$$

d'après le théorème de M. Wiman, β étant un nombre positif donné quelconque mais inférieur à un , il existe une suite de cercles $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ de rayons $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ indéfiniment croissants sur lesquels le minimum $m(r)$ de $F(z)$ pour $|z| = r$ vérifie l'inégalité

$$m(r) > [M(r)]^{1-\beta \cos^2 \pi \rho} \quad (r = \gamma_n).$$

(1) Par exemple, si l'on considère la fonction

$$f(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n^{\frac{1}{\rho}}} \right), \quad 1 > \rho > \frac{1}{2},$$

un calcul simple montre que l'on a

$$\log |f(z)| = \frac{\pi \cos [\varphi \rho (1 + \varepsilon(r, \varphi))]}{\sin \pi \rho} r^{\rho}, \quad z = re^{i\varphi},$$

$$\alpha - \pi < \varphi < \pi - \alpha, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(r, \varphi) = 0,$$

α étant un nombre donné très petit; dans le reste du plan $\log |f(z)|$ reste inférieur à $-hr^2$, h étant fini. On voit alors que, si l'on pose

$$\varphi(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^{\frac{1}{\rho_1}}} \right), \quad \frac{1}{2} < \rho_1 < \rho,$$

le produit

$$f(z) \varphi(z)$$

reste inférieur en module à

$$M(r) e^{-hr^2},$$

$M(r)$ étant le maximum du module $f(z)$. Lorsque ρ est supérieur à $\frac{3}{2}$, la considération de la fonction $f(z) \cdot f(-z)$ donnera un résultat encore plus net.

Considérons alors l'égalité

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} \frac{f(z)}{F(z)} z^p dz = \sum_{r_n < \gamma_q} \frac{A_n}{F'(a_n)} a_n^p;$$

l'intégrale étant prise sur le cercle C_q dans le sens direct, on en tire l'inégalité

$$\left| \sum_{r_n < \gamma_q} \frac{A_n}{F'(a_n)} a_n^p \right| < \frac{M_1(r)}{m(r)} r^p < \frac{M_1(r) r^p}{M(r)^{1-\beta} \cos \pi \rho} \quad (r = \gamma_q),$$

$M_1(r)$ désignant le maximum du module de $f(z)$ pour $|z| = r$. Par suite, s'il existe une fonction $f(z)$ pour laquelle on a

$$M_1(r) < M(r)^{1-\alpha \cos \pi \rho} \quad (\alpha > 0),$$

on aura quel que soit p :

$$(2) \quad \sum_{q=1}^{q=\infty} u_{q,p} = 0,$$

avec

$$u_{0,p} = \sum_{r_n < \gamma_1} \frac{A_n}{F'(a_n)} a_n^p, \quad u_{q,p} = \sum_{\gamma_q < r_n < \gamma_{q+1}} \frac{A_n}{F'(a_n)} a_n^p.$$

La proposition I est ainsi démontrée et la forme linéaire des égalités (2) montre qu'un nombre fini quelconque de nombre A_n est déterminé lorsque les autres le sont, c'est-à-dire qu'il n'existe pas en général de fonction $f(z)$ prenant des valeurs A_n données arbitrairement et satisfaisant à la condition

$$|f(z)| < [M(r)]^{1-\alpha \cos \pi \rho}.$$

Ce résultat est applicable aux fonctions d'ordre nul ($\rho = 0$) sans aucune modification.

3. Nous supposons maintenant que l'on a

$$r_n = n^{\omega(n)},$$

$\omega(x)$ étant une fonction dérivable vérifiant les conditions

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \omega(x) &= \frac{1}{\rho}, \quad \omega(x) < A, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \omega'(x) \times x \times \log x &= 0; \end{aligned}$$

nous désignerons par $\varepsilon(x)$ la fonction définie par les égalités

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{\omega(x)}, \quad x = x^{(n)},$$

et d'une façon générale par $\varepsilon(x)$ toute fonction qui tend vers zéro lorsque x croît indéfiniment. Il résulte de calculs simples ⁽¹⁾ que l'on a

$$\log M(r) \leq [1 - \varepsilon(r)] \frac{\pi}{\sin[\pi \varepsilon(r)]} r^{\varepsilon(r)},$$

et que dans la région obtenue en supprimant du plan les cercles Γ_n ayant pour centres les zéros a_n et pour rayons r_n^{-k} , k étant fini et fixe, $|F(z)|$ vérifie l'inégalité

$$\log |F(z)| \leq [1 - \varepsilon(r)] \frac{\pi \cos[\pi \varepsilon(r)]}{\sin[\pi \varepsilon(r)]} r^{\varepsilon(r)}.$$

Les cercles Γ_n étant extérieurs les uns aux autres à partir d'une certaine valeur de n , on voit que les conditions (2) prennent la forme simple

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{F'(a_n)} a_n^p = 0 \quad (p = 1, 2, \dots)$$

et il suffit même que l'on suppose

$$M_1(r) < [M(r)]^{1-\alpha \cos(\pi \varepsilon(r))} \quad (\alpha > 0),$$

4. Il est bien facile de voir, en s'appuyant sur l'existence de fonctions dont les zéros ont une distribution extraordinaire, que les égalités (1) ne peuvent pas dans tous les cas remplacer les égalités (2); il suffit en effet de prendre

$$A_n = f(a_n),$$

$f(z)$ étant une fonction entière satisfaisant à la condition

$$|f(z)| < M(r)^{(1-\alpha) \cos(\pi \varepsilon)}$$

et de supposer que pour une infinité de valeurs de a_n on a

$$\begin{aligned} A_n &> [M(r_n)]^{-\frac{k}{2}}, \\ F'(a_n) &\leq M(r)^{-k}, \\ k &> (1 - \alpha) \cos(\pi \varepsilon), \end{aligned}$$

(1) Voir mon Mémoire cité plus haut, n° 63.

pour voir que l'égalité (1) n'est pas réalisée. M. Borel a montré comment on peut former des fonctions $F(z)$ satisfaisant à la condition requise; il suffit par exemple que, pour une infinité de valeurs de n , l'inégalité

$$|a_n - a_{n-1}| < e^{-r_n^2} \quad (\rho_1 > \rho)$$

soit vérifiée (1).

Il y a également lieu de rechercher si les égalités (2) ne sont pas vérifiées toutes les fois que l'on a

$$M_1(r) < [M(r)]^\beta \quad (\beta < 1);$$

je montrerai sur un exemple qu'il n'en est rien.

Prenons

$$F(z) = \cos\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{4}}} e^{i\frac{z}{4}}\right) \cdot \cos\left[r^{\frac{1}{4}} e^{i\left(\frac{z}{4} + \frac{\pi}{2}\right)}\right] \\ z = r e^{i\varphi},$$

$F(z)$ est d'ordre $\frac{1}{4}$, son $n^{\text{ième}}$ zéro est

$$a_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \pi i$$

et l'on a

$$M(r) = F(-r) = [1 + \varepsilon(r)] \frac{er^{\frac{1}{4}} \times \sqrt{2}}{4}, \\ F'(a_n) = (-1)^n [1 + \varepsilon(n)] \frac{e^{\pi n - \frac{\pi}{2}}}{8\pi^3 n^3};$$

on en déduit

$$|F'(a_n)| = [M(a_n)]^{\cos(\pi\rho) - \varepsilon(n)}.$$

Pour $f(z)$ nous prendrons une fonction d'ordre $\frac{1}{4}$ à coefficients positifs

$$f(z) = \sum_0^\infty e^{-G(n)} z^n,$$

$G(x)$ étant choisi de façon que $f(z)$ soit calculable par la formule asymptotique de M. Le Roy (2), par exemple

$$G(x) = 4x \log \frac{x}{e^e} \quad (\log e = 1).$$

(1) Je reviendrai au n° 9 sur cette question de la distribution extraordinaire.

(2) LE ROY, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1900, p. 245.

On aura

$$f(r) = [1 + \varepsilon(r)] \sqrt{\frac{\pi c}{2}} r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} c r^2}$$

et par suite

$$\frac{f(a_n)}{F'(a_n)} = (-1)^n [1 + \varepsilon(n)] B n^{\frac{7}{2}} e^{(5c-1)\pi n},$$

B étant un nombre fixe. Nous supposons que $5c$ est supérieur à un (mais inférieur à $\sqrt{2}$); on voit alors que, si l'on pose

$$s_n = \sum_1^n \frac{f(a_n)}{F'(a_n)},$$

les nombres s_{2p} et $-s_{2p+1}$ sont positifs et croissent indéfiniment avec p et l'on ne peut par conséquent trouver une suite de nombres s_n ayant pour limite zéro, les conditions (2) ne sont pas vérifiées.

5. Les systèmes de relations (1) et (2) sont les généralisations des équations qui expriment l'abaissement du degré dans le problème de l'interpolation des polynomes; il convient donc de rechercher si ce n'est pas le fait de l'abaissement de l'ordre précisé qui conduit aux systèmes (1) et (2), c'est-à-dire de chercher si la condition

$$\lim_{r=\infty} \frac{M_1(r)}{M(r)} = 0$$

ne laisse pas les nombres A_n complètement arbitraires (soumis aux seules conditions

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{M(r_n)} = 0).$$

Nous allons montrer que, la fonction $F(z)$ étant convenablement choisie, on peut trouver des systèmes de nombres A_n satisfaisant aux conditions

$$A_n < [M(r_n)]^\gamma \quad (\gamma < 1)$$

et pour lesquels aucune solution du problème d'interpolation n'aura une croissance inférieure à $M(r)$. Prenons

$$F(z) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{r_n}\right), \quad r_n = n^{\omega(n)},$$

$\omega(x)$ vérifiant les conditions du n^o 3 et ayant pour limite $\frac{1}{\rho}$ lorsque x croît indéfiniment; on a alors

$$\log |F(z)| = \frac{[1 + \varepsilon(r)]\pi}{\sin(\pi\rho)} r^{\rho(r)} \cos(\rho\varphi),$$

$$z = re^{i\varphi}, \quad -\pi + \eta < \varphi < \pi - \eta,$$

η étant un nombre fixe aussi petit que l'on veut. Prenons d'autre part

$$f(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{ze^{i\alpha}}{r'_n}\right),$$

$$0 < \alpha < \pi, \quad r'_n = \left(\frac{n}{k}\right)^{\omega\left(\frac{n}{k}\right)},$$

$\omega(x)$ étant la même fonction que ci-dessus et les nombres k et α satisfaisant aux conditions

$$k > 1, \quad k \cos(\alpha\rho) < 1, \quad k \cos[(\pi - \alpha)\rho] < 1,$$

ce qui est évidemment possible. Considérons les fonctions

$$f(z) + F(z)\varphi(z);$$

nous montrerons que, pour chacune de ces fonctions, il existe une suite de valeurs de r croissant indéfiniment pour lesquelles le maximum du module est supérieur à $M(r)^{\delta}$, δ étant un nombre supérieur à un. Comme l'on a pour ces fonctions

$$\Lambda_n = f(-r_n) = M(r_n)^{k \cos(\pi - \alpha)\rho + \varepsilon(r_n)}$$

nous aurons un exemple répondant aux conditions requises.

Supposons d'abord que $\varphi(z)$ soit d'ordre supérieur à ρ , il en sera de même du produit $F(z) \cdot \varphi(z)$ et par suite de $f + F\varphi$, le maximum du module de cette fonction sera donc supérieur à $M(r)^{\delta}$ pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes.

Supposons maintenant que, quel que soit φ , $|\varphi(z)|$ reste inférieur à $M(r)^{k'-1}$, k' étant inférieur à k , nous aurons

$$|f(re^{-i\alpha}) + F(re^{-i\alpha})\varphi(re^{-i\alpha})| = [1 + \varepsilon(r)]f(re^{-i\alpha}),$$

ce qui nous donnera la même conclusion que dans le cas précédent.

Supposons enfin que $\varphi(z)$ soit d'ordre ρ et que pour une infinité de valeurs de r le maximum de son module soit supérieur ou égal à $M(r)^{k'-1}$; le théorème de M. Wiman montre alors, eu égard à la forme de la fonction $M(r)$, que l'on aura

$$|\varphi(z)| > M(r)^{(k'-1)\cos\pi\rho - \varepsilon(r)}$$

sur une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants, on aura donc sur ces cercles

$$f(r) + F(r)\varphi(r) = [1 + \varepsilon(r)F(r)\varphi(r)] > M(r)^{1+(k'-1)\cos\pi\rho - \varepsilon(r)}.$$

La propriété énoncée est donc démontrée et l'on voit que l'on peut prendre pour δ un nombre inférieur à $1 + (k-1)\cos\pi\rho$.

6. Supposons maintenant que l'on ait une suite de nombres A_n vérifiant les égalités (1) et les inégalités

$$(3) \quad A_n < M(r_n)^{(1-\alpha)\cos[\pi\rho(r_n)]} \quad (\alpha > 0),$$

nous allons montrer qu'il existe une fonction $f(z)$ satisfaisant à la condition de croissance

$$(4) \quad M_1(r) < [M(r)]^{1-\alpha[1-\varepsilon(r)]\cos(\pi\rho)},$$

cette fonction $f(z)$ est définie par l'égalité

$$f(z) = F(z)H(z),$$

$$H(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{F'(a_n)} \frac{1}{z - a_n}.$$

On voit tout d'abord que si l'on pose

$$G_n(z) = \frac{a_n F(z)}{z - a_n}$$

$G_n(z)$ jouit des propriétés énoncées au n° 3 pour $F(z)$, et il suit de là que l'on a

$$|F'(a_n)| = \left| \frac{G(a_n)}{a_n} \right| > M(r_n)^{(1-\varepsilon(r_n))\cos(\pi\rho(r_n))},$$

ce qui montre que $H(z)$ représente bien une fonction méromorphe ayant pour pôles simples les a_n et $f(z)$ une fonction entière qui

est d'ordre ρ au plus d'après les théorèmes généraux de M. Borel. Pour calculer d'une façon plus précise une limite supérieure de $M_1(r)$, il sera nécessaire de s'appuyer sur une propriété des fonctions entières $F(z)$ définies au n° 3 :

Si l'on pose

$$\log M(r) = V(x) \quad (r = e^x)$$

et que l'on désigne par $N(x)$ le nombre des zéros de $F(z)$ dont le module est inférieur ou égal à r , on a

$$(5) \quad N(x) = \lambda(x)V'(x),$$

$\lambda(x)$ étant compris entre deux nombres positifs fixes et $V'(x)$ étant la dérivée ou la dérivée à droite (ou à gauche) de $V(x)$.

On a en effet

$$V(x) = \mu(x)U(x), \quad U(x) = r^{\rho(r)},$$

$\mu(x)$ étant compris entre deux nombres fixes; d'autre part, $V'(x)$ étant croissante, on aura

$$V'(x)(x_1 - x) < \mu(x_1)U(x_1) - \mu(x)U(x) < V'(x_1)(x_1 - x) \\ (x_1 > x).$$

Il suffit alors de prendre pour x_1 la valeur $x + h$, h étant un nombre fixe convenablement choisi et de se rappeler les propriétés de la fonction $U(x)$ pour voir que l'on a

$$\mu(x_1)U(x_1) - \mu(x)U(x) = (x_1 - x)\nu U'(x) = (x_1 - x)\nu_1 U'(x_1),$$

ν et ν_1 restant aussi compris entre deux nombres fixes faciles à calculer. On a d'ailleurs

$$U'(x) = [1 + \varepsilon(x)]\rho(r)r^{\rho(r)} = h_1 N(x),$$

h_1 étant compris entre deux nombres fixes et par suite l'égalité (5) est démontrée.

On peut tirer de l'égalité (5) une proposition relative à la croissance de $M(r)$ qui sera aussi très utile. On a

$$V(x') - V(x) < (x' - x)V'(x')$$

et par suite, d'après (5),

$$V[x + \varepsilon(x)] - V(x) < \varepsilon(x)kN(x);$$

or le quotient de $V(x)$ par $N(x)$ reste compris entre des nombres positifs fixes, on aura donc

$$V[x + \varepsilon(x)] < V(x)[1 + \varepsilon_1(x)].$$

En d'autres termes l'égalité

$$\lim_{r=\infty} \frac{r'}{r} = 1$$

entraîne

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r')}{\log M(r)} = 1.$$

7. Nous pouvons écrire, d'après les égalités (1),

$$H(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\Lambda_n}{F'(a_n)} \frac{1}{z - a_n} \left(\frac{a_n}{z} \right)^q,$$

quel que soit le nombre positif q et sous la seule condition que z ne soit pas nul. Nous supposons que z est extérieur aux couronnes ayant pour rayons extrêmes $r_n \pm r_n^k$, k étant un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$, et nous définissons le nombre N par les inégalités

$$r_N + r_N^k < r < r_{N+1} - r_{N+1}^k.$$

Nous aurons

$$|H(z)| < \frac{\Lambda_0}{r^q} + \sum_{n=n_0}^{n=\infty} v_n,$$

$$v_n = \frac{r_n^q}{r^{k+q}} [M(r_n)]^{-\alpha_0 \cos(\pi\rho)},$$

α_0 étant un nombre inférieur à α mais aussi voisin de α que l'on veut pourvu que n_0 soit assez grand et Λ_0 étant fini en même temps que n_0 . Considérons l'expression

$$W(x) = V(x) - q_1 x,$$

$$q_1 = \frac{q}{\alpha_0 \cos(\pi\rho)}, \quad V(x) = \log M(e^x);$$

d'après les propriétés de la fonction $V(x)$, $W(x)$ a une dérivée à gauche et à droite qui est croissante et il y aura parmi les nombres v_n un nombre maximum. Si nous désignons, d'une façon générale, par $E(y)$ la partie entière d'un nombre y , nous

voyons que nous sommes conduits à prendre

$$q_1 = E[V'(\log r_N + 0)];$$

si l'on a

$$q_1 \geq V'(\log r_N - 0),$$

le terme maximum est v_N ; dans le cas contraire, il a un rang N' inférieur à N et l'on a

$$\begin{aligned} \log v_{N'} - \log v_N &= \alpha_0 \cos(\pi\rho) [q_1(x_{N'} - x_N) + V(x_N) - V(x_{N'})] \\ &= \alpha_0 \cos(\pi\rho) (x_N - x_{N'}) (\lambda_N - q_1), \\ x_N &= \log r_N, \quad x_{N'} = \log r_{N'}, \end{aligned}$$

λ_N étant compris entre

$$V'(x_{N'} + 0) \quad \text{et} \quad V'(x_N - 0);$$

par suite

$$\lambda_N - q_1 < 1$$

et

$$v_{N'} < v_N \left(\frac{r_N}{r_{N'}} \right)^{\alpha_0 \cos(\pi\rho)}.$$

Il en résulte que, dans les deux cas, le terme maximum a pour valeur

$$r^h \left(\frac{r_N}{r} \right)^q [M(r_N)]^{-\alpha_0 \cos(\pi\rho)}, \quad h < \alpha_0 \cos(\pi\rho);$$

or, d'après l'égalité (5),

$$q = \lambda_N = \lambda' r^{\rho(r)},$$

λ et λ' étant finis, et d'autre part, d'après la propriété démontrée à la fin du n° 6, on a

$$M(r_N) > [M(r)]^{1-\varepsilon(r)},$$

ce qui montre que le terme maximum a pour valeur

$$[M(r)]^{-\alpha[1-\varepsilon(r)] \cos(\pi\rho)}.$$

On a d'autre part, A désignant le nombre introduit au n° 3 et k étant un entier,

$$\log v_{kn} - \log v_n < A k q - \alpha_0 \cos(\pi\rho) \left[k^{\frac{1}{\rho}} \cos(\pi\rho) - 1 \right] \frac{n[1-\varepsilon(n)]}{\rho};$$

donc, en prenant k assez grand pour que

$$k^{\frac{1}{\rho}} \cos(\pi\rho) - 1$$

soit positif, on aura

$$\frac{k \nu_{kn}}{\nu_n} < \frac{1}{2}$$

pour $n > CN$, C étant un nombre qui reste fini lorsque N devient infini. On aura donc finalement

$$\sum_{n=n_0}^{n=\infty} \nu_n < [M(r)]^{-\alpha[1-\varepsilon(r)] \cos(\pi\rho)}$$

et l'inégalité est aussi valable pour $H(z)$, eu égard à la valeur de q . Nous obtenons donc l'inégalité

$$(4) \quad M_1(r) < [M(r)]^{1-\alpha[1-\varepsilon(r)] \cos(\pi\rho)}$$

lorsque r est extérieur aux intervalles $r_n \pm r_n^k$ et l'on voit, en utilisant la propriété de la fonction $M(r)$ démontrée à la fin du n° 6, que cette inégalité a lieu sans restrictions; la deuxième partie du théorème II est donc démontrée.

8. Il semble probable que l'inégalité (4) peut être remplacée par l'inégalité

$$M_1(r) < [M(r)]^{1-\alpha-\varepsilon(r)},$$

mais il est clair que le mode de démonstration employé ne peut conduire à ce résultat et qu'il faudrait, pour améliorer l'inégalité (4), introduire les arguments des nombres a_n et A_n . Dans le cas de l'ordre nul cependant, l'inégalité (4) devient entièrement satisfaisante et les deux parties de la proposition II sont exactement réciproques, mais cela tient uniquement à la trop large approximation; si pour chaque catégorie de fonctions d'ordre nul, on utilise le théorème de M. Wiman sous sa forme la plus précise, on obtiendra un résultat en tous points comparable à celui obtenu pour l'ordre fini.

On remarquera également que les égalités (1) dans lesquelles on considère les A_n comme inconnues rentrent dans un type d'équations qui fut considéré par M. Borel dans sa Thèse : on peut choisir arbitrairement une infinité quelconque de nombres A_n (en respectant toutefois la convergence absolue des premiers membres des équations), à la condition de laisser libre une infinité d'in-

connues. L'introduction des conditions (3) restreint peut-être cette indétermination.

9. Je montrerai en terminant que la remarque qui nous a servi à calculer une limite inférieure de $F'(a_n)$ peut être utilisée dans l'étude de la distribution extraordinaire. Lorsqu'on décompose en éléments simples une fonction méromorphe dont les pôles sont les zéros $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ d'une fonction $F(z)$ (zéros que nous supposons simples), l'ordre des nombres $|F'(a_n)|$ joue un rôle important. Si ρ est l'ordre de $F(z)$ et r_n le module de a_n le théorème sur le minimum du module d'une fonction entière montre que l'on doit avoir, en général,

$$|F'(a_n)| > e^{-r_n^{\rho+\varepsilon(r_n)}};$$

M. Borel dit que les zéros sont distribués de façon extraordinaire lorsque, pour une infinité de valeurs de n , on a

$$|F'(a_n)| < e^{-r_n^{\rho_1}} \quad (\rho_1 > \rho).$$

Nous avons

$$F'(a_n) = \Phi_n(a_n), \quad \Phi_n(a_n) = \frac{F(z)}{z - a_n};$$

or le produit de $a_n \Phi_n(z)$ par une exponentielle qui reste inférieure à n^k pour $|z| < 2r_n$ est le seul quotient de $F(z)$ par le facteur primaire correspondant à a_n , ce qui montre que l'étude de $F'(a_n)$ revient à l'étude de la valeur pour $z = a_n$ d'une fonction $F_n(z)$ qui ne diffère de $F(z)$ que par la suppression d'un facteur. Dans le cas de l'ordre fini, on peut supposer cet ordre ρ inférieur à un ⁽¹⁾, on a

$$|F_n(z)| < \prod_i' \left(1 + \frac{r'}{r_i}\right) < M(r);$$

d'autre part, si l'on pose

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) r_{n_1} < r < r_{n_1+1} \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) \\ \left(1 + \frac{1}{2^{p-1}}\right) r_{n_2} < r < r_{n_2+1} \left(1 + \frac{1}{2^{p-1}}\right) \quad (p \geq 2), \end{aligned}$$

(1) Les calculs sont d'ailleurs les mêmes dans le cas général.

on aura

$$\prod_1^{n_1} \left(\frac{r}{r_i} - 1 \right) > \left[\prod_1^{n_1} \left(1 + \frac{r}{r_i} \right) \right]^{-p},$$

$$\prod_{n_2+1}^{\infty} \left(1 - \frac{r}{r_i} \right) > \left[\prod_{n_2+1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{r_i} \right) \right]^{-p},$$

et par suite

$$|F_n(z)| > M(r)^{-p} \prod_{n_1+1}^{n_2} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right),$$

inégalité qui fournira les résultats cherchés, si on lui adjoint l'inégalité évidente

$$|F_n(z)| < M(r) \prod_{n_1+1}^{n_2} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right).$$

On voit que si l'on pose

$$|a_n - a_i| = d_{n,i} \quad (i \neq n),$$

on aura, d'après ces inégalités et en prenant $p = r^{\varepsilon(r)}$,

$$|F'(\alpha_n)| > e^{-r_n^{2+\varepsilon(n)}} \prod d_{n,i},$$

$$|F'(\alpha_n)| < e^{-r_n^{2+\varepsilon(n)}} \prod d_{n,i},$$

le produit $\prod d_{n,i}$ étant étendu aux quantités $d_{n,i}$ qui sont inférieures à $e^{-r_n^{\varepsilon(n)}}$. Il résulte de ces inégalités que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait distribution extraordinaire est que l'on ait*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 \frac{1}{\prod d_{n,i}}}{\log r_n} > p.$$

**SUR LA TRANSFORMATION DOUBLEMENT QUADRATIQUE,
LES POLYGONES DE PONCELET ET L'INVOLUTION MULTIPLE;**

PAR M. MAURICE FOUCHÉ.

I. — GÉNÉRALITÉS.

1. *Introduction.* — Dans un précédent travail ⁽¹⁾, j'ai indiqué des démonstrations relativement simples des propriétés des polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre. Poncelet fait dériver ces propriétés de celles des polygones qui ont leurs sommets sur une conique et dont les côtés sont tangents à plusieurs coniques faisant, avec la première, partie d'un même faisceau. Cette question est évidemment plus générale, mais aussi plus difficile que la première : il serait illusoire d'y vouloir chercher la même simplicité. Il est bien connu que les propriétés des polygones de Poncelet se rattachent à la considération d'équations à deux variables dont le premier membre se décompose en facteurs plus simples, chacun de ces facteurs étant du second ordre par rapport à chacune des deux variables. Une pareille équation établit entre les deux variables une correspondance *doublement quadratique*. Les propriétés de l'équation doublement quadratique à deux variables sont assez bien connues et ont donné lieu à de nombreux travaux parmi lesquels il convient de citer ceux de MM. Fontené et Bricard. En particulier, M. Fontené a publié en 1897 (*Nouvelles Annales des Mathématiques*, 3^e série, t. XVI) un important Mémoire où il applique les propriétés de la relation doublement quadratique à l'étude des polygones ayant leurs sommets sur certaines coniques et leurs côtés tangents à d'autres coniques, question qui a été récemment reprise par M. Darboux (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 162, 1916, p. 101). Je ne m'occuperai pas ici de cette extension des théorèmes

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XLIII, 1915.

de Poncelet ; mais je voudrais montrer que les relations doublement quadratiques peuvent conduire à d'autres propositions de géométrie. Enfin, aux questions de cette nature se rattachent aussi les propriétés d'un système de n points marqués sur une courbe unicursale et se déplaçant sur cette courbe de manière que leur ensemble dépende linéairement d'un paramètre variable, ce que j'ai appelé *l'involution multiple*.

2. *Rappel de quelques propriétés fondamentales de la relation doublement quadratique.* — Soit $f(x, y) = 0$ une pareille relation. On appelle *valeurs critiques* de x , celles pour lesquelles les deux valeurs correspondantes de y sont égales. La relation peut se mettre sous la forme

$$Ay^2 + 2By + C = 0,$$

où A, B, C sont des polynomes du second degré en x . Les valeurs critiques de x sont donc les racines de l'équation

$$B^2 - AC = 0.$$

On sait d'abord que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une relation doublement quadratique se décompose en deux relations homographiques est que les quatre valeurs critiques de l'une des variables soient égales deux à deux, à condition toutefois d'exclure le cas où le premier membre de la relation donnée serait divisible par un polynome du premier degré en x ou en y . Il est alors évident que, dans le cas général, si les valeurs critiques d'une variable sont égales deux à deux, il en sera de même des valeurs critiques de l'autre variable.

Considérons maintenant deux relations doublement quadratiques, l'une entre les variables y, z , l'autre entre x et z :

$$f(y, z) = 0, \quad g(z, x) = 0,$$

qu'on peut écrire, en ordonnant par rapport à z :

$$(1) \quad \begin{cases} A z^2 + 2B z + C = 0, \\ A' z^2 + 2B' z + C' = 0, \end{cases}$$

les lettres non accentuées désignant des polynomes du second degré par rapport à x , les autres des polynomes du second degré par rapport à y .

L'équation résultante obtenue en éliminant z est du huitième degré par rapport à l'ensemble des deux variables et du quatrième par rapport à chacune d'elles.

On sait que ce résultant se décompose en deux facteurs doublement quadratiques dans les deux cas suivants :

1° Si les valeurs critiques de z dans les deux équations (1) sont les mêmes ; 2° si dans chacune des équations (1) deux valeurs critiques sont égales, et si les deux valeurs critiques différentes de la première équation sont respectivement égales aux deux valeurs critiques différentes de la seconde.

Dans ces deux cas, la décomposition résulte de la remarque suivante : si l'on résout la première des équations par rapport à x et la seconde par rapport à y , les deux valeurs ainsi trouvées contiendront un même radical contenant z . On pourra alors éliminer ce radical, et l'on trouvera des résultats différents, suivant qu'on aura pris le radical avec le même signe ou avec des signes différents.

3. *Examen des cas de décomposition.* — Je me suis proposé d'étudier attentivement la réciproque du théorème précédent, afin de bien mettre en évidence les cas particuliers et les propriétés géométriques qui en découlent. La proposition correcte est la suivante :

Si le résultant se décompose en deux facteurs quadratiques *différents* et si les relations données ne se décomposent ni l'une ni l'autre, les valeurs critiques de la variable commune sont les mêmes dans les deux équations, ou bien, chaque équation admet pour la variable commune une valeur critique double, et les deux valeurs critiques simples sont les mêmes dans les deux équations.

Pour le faire voir, ordonnons les deux équations par rapport à x et y :

$$(2) \quad \begin{cases} Ax^2 + 2Bx + C = 0, \\ A'y^2 + 2B'y + C' = 0. \end{cases}$$

A, B, C, A', B', C' étant des polynômes du second degré en z , et supposons que le résultant R de ces équations se décompose en

deux facteurs dont l'un serait

$$(3) \quad (ax^2 + 2bx + c)y^2 + (hx^2 + 2kx + l)y + mx^2 + 2nx + p = 0.$$

A chaque couple de valeurs de x et y vérifiant cette équation correspond au moins une valeur de z vérifiant avec les précédentes les équations (2). Inversement, soit un couple de valeurs $x = x_1$, $z = z_1$ vérifiant la première des équations (2). A la valeur z_1 , la seconde des équations (2) fait correspondre deux valeurs de y , y_1 et y_2 qui, avec x_1 , annulent le résultant R et annulent, par conséquent, soit le premier membre de l'équation (3), soit l'autre facteur du résultant R . Je dis que l'une de ces valeurs vérifie l'équation (3). Soit en effet x_1, y_3 une solution quelconque de l'équation (3). Il existe, avons-nous dit, une valeur de z , z_3 qui, avec x_1 et y_3 , vérifie les deux équations (2). Donc le système x_1, z_3 annule le résultant R' de l'équation (3) et de la seconde des équations (2). Donc ce résultant et la première des équations (2) ont une infinité de solutions communes. Il faut donc, ou que le premier membre de la première des équations (2) soit un diviseur de R' , ou que ces deux polynomes aient un facteur commun. Dans le second cas le premier membre de la première équation (2) se décomposerait en deux facteurs, ce que nous n'admettons pas. Donc toute solution de la première équation (2) annule le résultant R' , et il lui correspond une valeur de y vérifiant les deux équations dont R' est le résultant, et en particulier l'équation (3). Ainsi, à chaque valeur de z correspondent deux valeurs de x données par la première des équations (2), à chacune desquelles correspond une valeur de y vérifiant avec x l'équation (3), soit en définitive deux valeurs de y vérifiant avec x et z l'équation (3) et les équations (2).

Cela posé, éliminons y^2 entre l'équation (3) et la seconde des équations (2). Nous obtiendrons une équation *du premier degré* en y qui nous permettra d'exprimer y au moyen d'une fraction rationnelle contenant x et z . Nous y pourrions remplacer x par sa valeur tirée de la première des équations (2) et nous aurons une expression ne contenant que la variable z et dans laquelle figurera le radical $\sqrt{B^2 - AC}$. On a ainsi deux valeurs de y qui doivent être les mêmes que celles qu'on tire de la seconde des équations (2) et qui contiennent le radical $\sqrt{B'^2 - A'C'}$. Si le polynome $B^2 - AC$

a ses quatre racines distinctes, le radical ne peut se simplifier, et les deux couples de valeurs de y ne peuvent être les mêmes que si les deux radicaux ne diffèrent que par un facteur constant, ce qui prouve qu'ils admettent les mêmes racines et que, par suite, les valeurs critiques de z sont les mêmes dans les deux équations (2).

Si le polynome $B^2 - AC$ a une racine double, le facteur correspondant étant au carré sort du radical, et le radical ne porte plus que sur un polynome du second degré. Il doit en être de même du second radical; donc $B'^2 - A'C'$ admet aussi une racine double et les deux autres racines sont les mêmes que celles de $B^2 - AC$; c'est le deuxième cas prévu dans l'énoncé.

Le raisonnement précédent tombe en défaut si l'équation obtenue par l'élimination de y^2 devient une identité quand on y remplace x par sa valeur tirée de la première des équations (2). Pour faire l'élimination, tirons y^2 de la seconde des équations (2) et portons-en la valeur dans l'équation (3). Nous aurons :

$$-(ax^2 + 2bx + c)(2B'y + C') + A'(hx^2 + 2kx + l)y + A'(mx^2 + 2nx + p) = 0$$

ou

$$[(hA' - 2aB')x^2 + 2(kA' - 2bB')x + lA' - 2cB']y + (mA' - aC')x^2 + 2(nA' - bC')x + pA' - cC' = 0.$$

Le cas exceptionnel est celui où cette équation devient une identité toutes les fois que x vérifie la première des équations (2). C'est donc que le coefficient de y et le second terme sont chacun identiques au premier membre de la première des équations (2), à un facteur constant près. On pourra donc écrire les six conditions :

$$(4) \quad \begin{cases} hA' - 2aB' = \lambda A, & mA' - aC' = \mu A, \\ kA' - 2bB' = \lambda B, & nA' - bC' = \mu B, \\ lA' - 2cC' = \lambda C, & pA' - cC' = \mu C, \end{cases}$$

d'où l'on déduit :

$$(5) \quad \begin{vmatrix} h & a & A \\ k & b & B \\ l & c & C \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} m & a & A \\ n & b & B \\ p & c & C \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne pour A, B, C deux équations linéaires homogènes à

coefficients constants. Si ces deux équations ne sont pas identiques, A , B , C sont proportionnels à trois nombres constants, c'est-à-dire qu'ils sont les produits d'un même trinome du second degré en z par trois nombres constants. Alors la première des équations (2) se décompose en deux facteurs dont l'un est un trinome du second degré par rapport à x et l'autre un trinome du second degré par rapport à z .

Si les deux équations (5) sont identiques, supposons que l'un au moins des coefficients de A , B , C ne soit pas nul. Alors A , B et C seront des fonctions linéaires et homogènes de deux trinomes du second degré par rapport à z , soit Z et Z_1 . On pourra ensuite tirer des équations (4) A' , B' et C' en fonctions linéaires et homogènes de A , B , C et par suite aussi de Z et Z_1 . Finalement, les équations (2) ne contiendront que deux trinomes du second degré par rapport à z et pourront s'écrire

$$ZX_1 - XZ_1 = 0,$$

$$ZY_1 - YZ_1 = 0,$$

X et X_1 étant des trinomes du second degré par rapport à x_1 , Y et Y_1 des trinomes de second degré par rapport à y_1 .

L'équation résultante se réduit à

$$XY_1 - YX_1 = 0.$$

Elle est doublement quadratique au lieu d'être de huitième degré; mais si on l'avait calculée par la formule classique on aurait trouvé

$$(XY_1 - X_1Y)^2 = 0.$$

On peut supposer qu'une seule des deux équations (5) soit une identité : rien ne sera changé aux conclusions précédentes.

Si enfin les deux équations (5) sont des identités, c'est que les coefficients h , k , l d'une part, m , n , p d'autre part sont proportionnels à a , b , c . Alors le premier membre de l'équation (3) se décompose en deux facteurs qui sont des trinomes du second degré, l'un par rapport à x , l'autre par rapport à y . Cela veut dire qu'il existe deux valeurs de x par exemple, pour lesquelles les équations (2) ont une solution commune quelle que soit y . Il faut alors que la seconde des équations (2) soit vérifiée pour cette

valeur de x quelle que soit y . Elle se décomposera donc en deux autres, l'une ne contenant que x , l'autre que y . Il en sera de même de la première.

Si l'on considère ensemble les deux équations (2) et l'équation (3) qui admettent une infinité de solutions communes, il est évident que le premier membre de chacune d'elles est l'un des facteurs du résultant des deux autres. On peut alors formuler la conclusion :

Si trois équations doublement quadratiques irréductibles, chacune entre deux des trois variables x, y, z admettent une infinité de solutions communes, ou bien les valeurs critiques de chacune des variables qui ne sont pas des valeurs critiques doubles sont les mêmes dans les deux équations qui contiennent cette variable, ou bien les trois équations sont de la forme

$$YZ_1 - ZY_1 = 0, \quad ZX_1 - XZ_1 = 0, \quad XY_1 - YX_1 = 0,$$

chacune des grandes lettres désignant un trinôme du second degré par rapport à la variable du même nom.

4. *Relation doublement quadratique symétrique.* — Supposons que, si la relation doublement quadratique est vérifiée par le couple de valeurs $x = \alpha, y = \beta$, elle le soit aussi par le couple $x = \beta, y = \alpha$. Alors les deux équations $f(x, y) = 0$ et $f(y, x) = 0$ auront une infinité de solutions communes. Si les premiers membres ne se décomposent pas en facteurs, il faudra qu'ils soient identiques, et alors la relation sera symétrique par rapport aux deux variables x et y .

Remarquons qu'on obtiendra aussi une relation doublement quadratique symétrique en multipliant les premiers membres de deux relations homographiques symétriques l'une de l'autre :

$$(axy + bx + cy + f)(axy + by + cx + f) = 0.$$

Il est évident que dans une relation doublement quadratique symétrique, les valeurs critiques d'une variable sont égales à celles de l'autre.

Soit une relation doublement quadratique quelconque :

$$f(x, y) = 0.$$

A chaque valeur de y correspondent deux valeurs x' et x'' . Ces deux valeurs sont liées par une relation doublement quadratique symétrique. En effet, si l'on se donne x' , on trouve deux valeurs de y à chacune desquelles correspond un couple de valeurs de x ; mais chacun de ces couples doit contenir la valeur initiale x' . A chacune des valeurs de x' correspondent donc deux valeurs de x'' et réciproquement. Enfin, si l'équation entre x' et x'' est vérifiée par $x' = \alpha$ et $x'' = \beta$ et qu'on pose $x' = \beta$, il est clair que l'une des valeurs de x'' devra être égale à α , puisque α et β sont les deux racines de la première équation correspondant à une même valeur de y .

Remarquons aussi que, si la première relation $f(x, y) = 0$ est elle-même symétrique, les valeurs critiques de la seconde sont égales à celles de la première. Soit en effet α une valeur critique de cette équation. Si l'on fait $x = \alpha$, on trouve pour y deux valeurs égales $y = \beta$. A cette unique valeur $y = \beta$ correspond dans l'équation primitive un seul couple de valeurs de x , $x = \alpha$ et $x = \alpha'$. Donc à $x' = \alpha$ correspondent deux valeurs égales de x'' : $x'' = \alpha'$.

5. *Détermination de la relation doublement quadratique symétrique. Application géométrique.* — Cette relation est de la forme

$$ax^2y^2 + bxy(x + y) + c(x^2 + y^2) + cxy + f(x + y) + h = 0.$$

Elle contient six coefficients qui peuvent être multipliés par un même nombre, et ne figurent par conséquent que par leurs rapports qui sont au nombre de cinq. Donc, cette relation est déterminée par cinq couples de valeurs conjuguées, sauf les cas d'indétermination.

Pour éviter toute discussion algébrique, faisons une application géométrique de ce qui précède. Supposons que x et y soient les paramètres de deux points A et B d'une conique (C), et cherchons l'enveloppe de la droite AB. Une droite de l'ensemble coupe la conique (C) en deux points A et B et on l'obtient en prenant pour x la valeur du paramètre du point A ou du point B et pour y , la valeur du paramètre de l'autre point. Si l'on se donne le point A sur la conique, on peut prendre pour x la valeur du paramètre de ce point, et l'équation fera connaître deux valeurs de y , c'est-à-dire

deux points B et B' sur la conique, et par suite deux droites AB et AB' . Si maintenant on avait pris le paramètre de A pour valeur de y , il résulte de la symétrie de l'équation qu'on aurait trouvé pour x les deux mêmes valeurs que précédemment pour y , et par suite les deux mêmes points B et B' et les deux mêmes droites AB , AB' . Donc, par chaque point de la conique passent deux droites de l'ensemble et deux seulement. Il en résulte que l'enveloppe de la droite AB est une conique (D).

Réciproquement, les tangentes à une conique (D) déterminent sur la conique (C) une relation doublement quadratique symétrique, puisque de chaque point A pris sur (C) on peut mener à (D) deux tangentes qui coupent (C) en deux autres points B et B' . La symétrie est du reste évidente puisque, en se donnant B par exemple, on retrouve A et un autre point.

Ainsi, étant donnée une conique (C), se donner une relation doublement quadratique symétrique équivaut à se donner une conique (D) et réciproquement. Or la conique (D) est complètement déterminée par cinq tangentes, c'est-à-dire par cinq couples de points A et B pris sur la conique (C). Donc la relation doublement quadratique symétrique est complètement déterminée par cinq couples de valeurs des variables différents entre eux. Il est bien entendu que deux de ces cinq couples peuvent comprendre la même valeur d'une des variables pourvu que les valeurs de l'autre soient différentes; cela revient à donner dans la conique (C) deux cordes partant d'un même point; mais il ne faut pas que trois des couples donnés comprennent une même valeur d'une des variables.

Les valeurs critiques sont celles des paramètres des points de (C), d'où les deux tangentes qu'on peut mener à (D) se confondent : ce sont donc les paramètres des quatre points communs à (C) et à (D). La conique (D) sera complètement déterminée si l'on se donne ses quatre points d'intersection avec (C) et la tangente en l'un d'eux A , c'est-à-dire le point B qui correspond à A sur (C) pourvu toutefois que les deux coniques ne soient pas tangentes en A . Donc :

Une relation doublement quadratique symétrique est complètement déterminée quand on se donne les quatre valeurs

critiques et la valeur de l'autre variable correspondant à l'une d'elles, pourvu que celle-ci soit une valeur critique simple.

Si l'on se donnait les quatre points d'intersection et une corde de (C) tangente à (D), on trouverait deux coniques (D). Donc :

Il y a deux relations doublement quadratiques symétriques qui admettent quatre valeurs critiques données et un couple de valeurs conjuguées.

Si les coniques (C) et (D) sont bitangentes, les valeurs critiques sont égales deux à deux et la relation doublement quadratique se décompose en deux relations homographiques symétriques l'une de l'autre.

6. *Conditions de symétrie.* — Une relation doublement quadratique entre deux variables x et y est symétrique si deux valeurs critiques de x sont respectivement égales à deux valeurs critiques de y et si les valeurs de y qui correspondent aux deux valeurs critiques de x sont respectivement égales aux deux valeurs de x qui correspondent aux deux mêmes valeurs de y .

Pour le démontrer, remarquons d'abord que, si une relation doublement quadratique est symétrique, elle le restera après qu'on aura fait subir aux deux variables x et y une même transformation homographique. Nous pourrions alors choisir cette transformation de manière que les deux valeurs critiques égales de x et y soient respectivement zéro et l'infini. Dans ces conditions, la relation pourra s'écrire

$$(6) \quad (ax + b)^2 y^2 + 2(mx^2 + 2nx + p)y + (hx + k)^2 = 0.$$

Pour y infinie, on a $x = -\frac{b}{a}$, et pour $y = 0$ on a $x = -\frac{k}{h}$. Par hypothèse, il faut que pour x infinie les deux valeurs de y soient égales à $-\frac{b}{a}$, et que pour $x = 0$ les deux valeurs de y soient égales à $-\frac{k}{h}$. Or, pour x infinie, l'équation (6) se réduit à

$$a^2 y^2 + 2my + h^2 = 0$$

qui doit être identique à

$$a^2 y^2 + 2aby + b^2 = 0,$$

ce qui exige

$$m = ab, \quad h = \pm b.$$

Le signe de h est indifférent puisque, h n'entrant que dans un carré, on peut changer à la fois les signes de h et de k . Nous prendrons donc $h = b$, et la relation deviendra

$$(ax + b)^2 y^2 + 2(abx^2 + 2nx + p)y + (bx + k)^2 = 0.$$

Si maintenant on suppose $x = 0$, on a

$$b^2 y^2 + 2py + k^2 = 0$$

qui, par hypothèse, doit être identique à

$$(hy + k)^2 = 0,$$

et, puisque $h = b$, à

$$b^2 y^2 + 2bky + k^2 = 0,$$

ce qui exige simplement

$$p = bk.$$

Finalement la relation (6) devient

$$(ax + b)^2 y^2 + 2(abx^2 + 2nx + bk)y + (bx + k)^2 = 0$$

ou

$$a^2 x^2 y^2 + 2abxy(x + y) + b^2(x^2 + y^2) + 4nxy + 2bk(x + y) + k^2 = 0$$

qui est en effet symétrique par rapport à x et y .

Comme cas particulier, la relation doublement quadratique est encore symétrique si les deux variables admettent une même valeur critique double, et si les valeurs de l'autre variable qui correspondent à cette valeur critique double sont égales, *pourvu qu'elles soient différentes de la valeur critique double*.

Pour le faire voir, faisons une transformation homographique qui rende infinie la valeur critique double, et nulle la valeur correspondante de l'autre variable. Pour x infinie, on doit avoir deux valeurs nulles de y , et pour y infinie deux valeurs nulles de x ; l'équation doit donc être de la forme :

$$x^2 y^2 + axy + bx + cy + h = 0.$$

Si l'on ordonne par rapport à y , on verra que les valeurs critiques

de x sont données par l'équation

$$(ax + c)^2 - 4x^2(bx + h) = 0$$

qui n'est que du troisième degré comme cela devait être puisqu'il y a une valeur critique infinie; mais il doit y en avoir une seconde, ce qui exige $b = 0$. En ordonnant par rapport à x , on trouverait $c = 0$. Il reste une équation du second degré en xy , et la relation se décompose en deux relations homographiques symétriques.

Il reste à examiner le cas où la valeur d'une variable qui correspond à la valeur critique de l'autre serait justement égale à cette valeur critique. Rendons cette valeur infinie par une transformation homographique. Si l'on ordonne l'équation par rapport à x ou y , les coefficients de x^2 ou de y^2 seront des constantes et la relation ne sera pas nécessairement symétrique; mais elle est du second degré en x et y , et les deux variables pourront s'exprimer par des fractions rationnelles du second ordre d'une variable t .

7. Résultant de deux relations doublement quadratiques symétriques admettant les mêmes valeurs critiques. Il se décompose en deux facteurs symétriques, sauf un cas particulier. — Considérons deux relations doublement quadratiques, l'une entre y et z , l'autre entre x et z , symétriques l'une et l'autre et admettant les mêmes valeurs critiques qui, à cause de la symétrie, seront les mêmes pour les trois variables. Nous savons déjà que, puisque les valeurs critiques de z sont les mêmes dans les deux équations, l'équation résultante obtenue en éliminant z entre les deux équations données se décompose en deux équations doublement quadratiques, et que chacune d'elles admet les mêmes valeurs critiques de x et de y que les équations données, sauf dans le cas particulier signalé à la fin du n° 3. Finalement, sauf dans ce cas particulier, toutes les valeurs critiques sont égales. Cela donne à penser que les deux équations dans lesquelles se décompose l'équation résultante sont elles-mêmes symétriques. Mais le fait qu'une équation doublement quadratique a les mêmes valeurs critiques pour les deux variables ne suffit pas à prouver qu'elle est symétrique.

Pour établir la proposition qui est en effet exacte, considérons

les équations

$$f(\gamma, z) = 0, \quad g(z, x) = 0,$$

et supposons d'abord que, parmi les quatre valeurs critiques, il y en ait au moins trois différentes. Nous pourrions faire subir aux trois variables une transformation homographique qui rende deux des valeurs critiques l'une nulle et l'autre infinie. Alors l'équation $g = 0$ devra se mettre sous la forme

$$(az + b)^2 x^2 + 2(mz^2 + 2nz + p)x + (hz + k)^2 = 0$$

et la symétrie exigera les conditions

$$m = ab, \quad b^2 = h^2, \quad p = hk.$$

Ainsi qu'on l'a fait remarquer au numéro précédent, on peut prendre $b = h$ et écrire la relation

$$(7) \quad (az + b)^2 x^2 + 2(abz^2 + 2nz + bk)x + (bz + k)^2 = 0.$$

Les valeurs critiques de z sont données par l'équation

$$(abz^2 + 2nz + bk)^2 - (az + b)^2 (bz + k)^2 = 0,$$

ou

$$abz^2 + 2nz + bk = \pm (az + b)(bz + k).$$

Si l'on prend le signe $+$ dans le second membre, on trouve $z = 0$ et $z = \infty$; mais si l'on prend le signe $-$ on aura

$$(8) \quad 2abz^2 + (2n + ak + b^2)z + 2bk = 0.$$

On peut alors faire subir aux trois variables une nouvelle transformation homographique qui conserve les valeurs nulles et infinies, ce qui équivaut à les multiplier toutes les trois par un même nombre, et l'on peut choisir ce nombre de manière que le produit des deux dernières valeurs critiques données par l'équation (8) soit égal à $+1$. Alors on aura simplement $k = a$, et notre relation doublement quadratique deviendra

$$(9) \quad (az + b)^2 x^2 + 2(abz^2 + 2nz + ab)x + (bz + a)^2 = 0.$$

L'autre, entre z et γ , sera de même :

$$(10) \quad (a'z + b')^2 \gamma^2 + 2(a'b'z^2 + 2n'z + a'b')\gamma + (b'z + a')^2 = 0.$$

Les discriminants de ces deux équations ne doivent différer que

par un facteur constant; mais, puisqu'on peut multiplier tous les coefficients par un même nombre, on peut supposer ce facteur constant égal à +1. Écrivons donc que les deux discriminants sont égaux : celui de l'équation (9) est

$$\begin{aligned} & [(a\mathfrak{z} + b)(b\mathfrak{z} + a) + ab\mathfrak{z}^2 + 2n\mathfrak{z} + ab] \\ & \times [(a\mathfrak{z} + b)(b\mathfrak{z} + a) - ab\mathfrak{z}^2 - 2n\mathfrak{z} - ab] \end{aligned}$$

ou

$$(a^2 + b^2 - 2n)\mathfrak{z} [2ab\mathfrak{z}^2 + (2n + a^2 + b^2)\mathfrak{z} + 2ab];$$

celui de l'équation (10) s'obtiendra en accentuant les lettres. Pour qu'il y ait identité, il faudra donc qu'on ait

$$\begin{aligned} (11) \quad ab(a^2 + b^2 - 2n) &= a'b'(\alpha'^2 + b'^2 - 2n'), \\ \frac{a^2 + b^2 + 2n}{ab} &= \frac{\alpha'^2 + b'^2 + 2n'}{a'b'}. \end{aligned}$$

Cette deuxième condition peut s'écrire

$$a'b'(a^2 + b^2 + 2n) = ab(\alpha'^2 + b'^2 + 2n'),$$

ou encore

$$(12) \quad a'b'(a^2 + b^2) - 2abn' = ab(\alpha'^2 + b'^2) - 2a'b'n.$$

Pour éliminer $\mathfrak{z}$ entre les deux équations (9) et (10) commençons par éliminer le radical commun ainsi que nous l'avons expliqué à la fin du n° 2.

Nous aurons, en prenant le radical avec des signes différents :

$$\begin{aligned} (13) \quad (a\mathfrak{z} + b)^2x + (a'\mathfrak{z} + b')^2y \\ + (ab + a'b')\mathfrak{z}^2 + 2(n + n')\mathfrak{z} + ab + a'b' = 0. \end{aligned}$$

On obtiendra l'un des facteurs du résultant en éliminant $\mathfrak{z}$ entre cette équation et l'une des équations (9) ou (10). D'après ce qu'on a vu au numéro précédent, nous savons déjà que les valeurs critiques qui ne sont pas doubles, et il y en a au moins deux, sont les mêmes dans la nouvelle résultante et dans les équations (9) et (10); il nous reste donc à démontrer que dans cette nouvelle résultante les valeurs de y qui correspondent à deux valeurs critiques de x sont les mêmes que les deux valeurs de x qui correspondent respectivement aux mêmes valeurs critiques de y . Comme la transformation homographique a rendu nulle

n'importe laquelle des racines du discriminant, il suffit de faire la démonstration pour cette racine nulle.

Enfin, il est inutile de faire l'élimination; il suffit de montrer que si l'on suppose successivement $x = 0$ et $y = 0$ dans le système des équations (9), (10) et (13), on trouvera dans les deux cas la même valeur soit pour x , soit pour y . Or, si l'on fait $x = 0$ dans l'équation (9), on a

$$z = -\frac{a}{b}.$$

Transportons ces valeurs dans l'équation (13). Il viendra, après disparition du dénominateur.

$$(14) \quad (bb' - aa')^2 y + (ab + a'b')a^2 - 2(n + n')ab + (ab + a'b')b^2 = 0.$$

La valeur de x s'obtiendra de même en faisant $y = 0$ dans l'équation (10). Il faudra permuter dans l'équation (14) les lettres accentuées et les lettres non accentuées. Il suffit donc de vérifier que l'équation (14) est symétrique par rapport à ces deux espèces de lettres. Or, le coefficient de y est déjà symétrique. Quant au terme constant, on peut l'écrire

$$ab(a^2 + b^2 - 2n) + a'b'(a^2 + b^2) - 2abn',$$

et les équations (11) et (12) montrent qu'il n'est pas modifié par l'échange des lettres accentuées ou non.

On serait arrivé évidemment à la même conclusion si l'on avait éliminé le radical commun pris les deux fois avec le même signe.

Supposons maintenant que le discriminant de l'équation $g = 0$ ait une racine triple que nous rendrons infinie, et une racine simple que nous rendrons nulle. Remontons alors à l'équation (8) qui donne les deux racines du discriminant autres que celles qu'on avait rendues nulle et infinie. Il faut maintenant que cette équation (8) ait deux racines infinies, ce qui exige

$$ab = 0, \quad 2n + ak + b^2 = 0.$$

Si $b = 0$, $2n + ak = 0$, l'équation (8) est vérifiée identiquement, et le discriminant est nul quelle que soit z . Le premier membre de la relation doublement quadratique se réduit donc à un

carré parfait, et cette relation à une relation homographique involutive.

Supposons donc

$$a = 0, \quad 2n = -b^2.$$

La relation (7) devient :

$$b^2x^2 + 2(-b^2z + bk)x + (bz + k)^2 = 0.$$

Comme b n'est pas nulle, on peut tout diviser par b^2 et poser

$$\frac{k}{b} = -a.$$

L'équation sera alors

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2(z + a)x + (z - a)^2 = 0, \\ \text{et l'autre} \\ y^2 - 2(z + a')y + (z - a')^2 = 0. \end{array} \right.$$

On voit d'abord que, pour x infinie, on a z infinie et, à cause de la seconde équation, y infinie aussi. De même pour y infinie, on aurait x infinie. Mais c'est justement le cas exceptionnel signalé à la fin du n° 6 et qui ne permet pas de conclure à la symétrie. Il faut donc vérifier que les valeurs correspondant à l'autre valeur critique sont égales. Si l'on résout les deux équations (15) l'une par rapport à x , l'autre par rapport à y et qu'on élimine le radical commun, pris avec des signes contraires, on trouvera

$$\sqrt{a'}(x - z - a) + \sqrt{a}(y - z - a') = 0.$$

Pour la valeur critique $x = 0$, la première des équations (15) donne $z = a$, valeur qui transportée dans l'équation précédente donne

$$y = a + a' + 2\sqrt{aa'}.$$

La symétrie de cette formule montre que pour $y = 0$ on aurait trouvé la même valeur de x , ce qui achève la démonstration.

Pour être complet, il convient de signaler le cas où les deux racines du discriminant sont égales deux à deux; mais alors le discriminant est un carré parfait, et les deux relations doublement quadratiques se décomposent chacune en deux relations homographiques symétriques l'une de l'autre. Le résultant se décompose alors en quatre facteurs homographiques symétriques deux à deux.

8. *Cas particulier.* — Il nous reste maintenant à étudier le cas particulier signalé à la fin du n° 3 et dans lequel on ne peut pas conclure que les valeurs critiques de l'équation résultante sont les mêmes que celles des équations données. Ce cas est celui où les deux équations données sont de la forme

$$(16) \quad XZ' - ZX' = 0, \quad YZ' - ZY' = 0.$$

Le résultant est alors un carré parfait, et l'équation résultante se réduit à

$$XY' - YX' = 0.$$

Seulement ici, chacune des deux équations (16) doit être symétrique par rapport aux deux variables. La première des équations (16) peut s'écrire

$$\frac{X}{X'} = \frac{Z}{Z'} = -\lambda,$$

λ étant un nombre quelconque. A chaque valeur de x correspond une seule valeur de λ donnée par l'équation

$$(17) \quad X + \lambda X' = 0,$$

et à cette valeur de λ deux valeurs de z données par l'équation du second degré

$$(18) \quad Z + \lambda Z' = 0.$$

Pour que la valeur donnée à x soit une valeur critique, il faut et il suffit que l'équation (18) ait ses racines égales. Mais, à chaque valeur de λ correspondent deux valeurs de x . Il y a donc deux valeurs critiques de x qui donnent à λ une valeur rendant carré parfait le premier membre de l'équation (18) et qui conduisent par suite à la même valeur double de z . Donc, aux quatre valeurs critiques de x correspondent seulement deux valeurs doubles de z . Ces deux valeurs doubles ne peuvent être égales. En effet, s'il en était ainsi, ou bien l'équation (18) aurait la même racine double pour deux valeurs différentes de λ , et alors Z et Z' auraient eux-mêmes cette même racine double commune et ne différeraient que par un facteur constant, ou bien les deux valeurs de λ seraient égales. Mais, si l'on développe les trinomes du second degré Z et Z' et qu'on forme le discriminant de l'équation (18), lequel est

une fonction du second degré en λ , on verra facilement que ce discriminant ne peut être un carré parfait que si le résultant de Z et Z' est nul, c'est-à-dire si ces deux polynômes ont un facteur du premier degré commun. Alors la première des équations (16) ne serait pas une relation biquadratique proprement dite.

Puisque les deux valeurs doubles de z sont différentes, nous pourrions faire une transformation homographique qui rende l'une nulle et l'autre infinie. La première des équations (16) pourra s'écrire sous la forme

$$A z^2 + 2 B z + C = 0,$$

A, B, C étant trois trinômes du second degré par rapport à x , et nous avons vu au n° 3 que l'un de ces trinômes doit être une fonction linéaire et homogène des deux autres. Ni C , ni A ne peuvent être nuls, car, ou bien l'équation contiendrait z en facteur, ou bien elle ne contiendrait pas le carré de z et ne pourrait alors, à cause de la symétrie, contenir le carré de x . Nous pourrions donc supposer que B est une fonction linéaire et homogène de A et de C et écrire

$$A z^2 + (m A + n C) z + C = 0.$$

Pour une certaine valeur critique de x , cette équation doit admettre une valeur double de z égale à zéro et par conséquent se réduire à $z^2 = 0$. Cette valeur critique devra donc annuler C ; elle ne peut annuler en même temps A , car les deux trinômes A et C ne doivent pas avoir de facteur commun. Donc il faut que le coefficient m soit nul. Il faut aussi que, pour une autre valeur critique de x , l'équation admette une racine double infinie et se réduise par conséquent à $C = 0$. Cela exige que le coefficient n soit nul aussi, et alors notre équation devient

$$(ax^2 + 2bx + c)z^2 + (a'x^2 + 2b'x + c') = 0.$$

Pour qu'elle soit symétrique, nous aurons les conditions

$$b = b' = 0, \quad c = a'.$$

Nous l'écrirons finalement

$$(ax^2 + c)z^2 + cx^2 + h = 0.$$

Enfin, nous pourrions encore multiplier les trois variables par un

même nombre et choisir ce nombre de manière que le produit des quatre valeurs critiques de x soit égal à l'unité, ce qui nous donnera $h=a$, et l'équation deviendra

$$(ax^2 + c)z^2 + cx^2 + a = 0.$$

Le polynome Z se réduit à z^2 , et le polynome Z' à une constante. On verra par le même raisonnement que les valeurs de Z , qui correspondent aux valeurs critiques de y dans la seconde des équations (16), sont également données par l'équation (18) lorsque l'on attribue à λ une valeur qui en annule le discriminant. Ce sont donc les mêmes que celles qui correspondent aux valeurs critiques de x : on peut répéter le raisonnement précédent et la seconde des équations (16) sera

$$(a'y^2 + c')z^2 + c'y^2 + h' = 0.$$

Il faut maintenant exprimer que les valeurs critiques sont les mêmes dans les deux équations. Or ces valeurs critiques sont les racines du coefficient de z^2 et du terme constant. Ces polynomes doivent donc être les mêmes chacun à une constante près; mais il est facile de voir que les deux constantes sont égales. On pourra donc les supposer égales à $+1$, de sorte que la seconde des équations (16) sera

$$(ay^2 + c)z^2 + cy^2 + a = 0$$

ou

$$(cy^2 + a)z^2 + ay^2 + c = 0.$$

Dans le premier cas, les deux équations sont identiques, sauf le changement des variables, et la résultante se réduit à

$$x^2 = y^2, \quad x = \pm y.$$

Dans le second cas, la résultante est

$$x^2 y^2 = 1 \quad \text{ou} \quad xy = \pm 1.$$

On voit ainsi que les deux relations données sont des relations homographiques involutives entre les carrés des variables et que leur résultante se décompose en deux relations homographiques qui sont involutives toutes deux dans le second cas, tandis que dans le premier cas, une seule est involutive, et l'autre définit la

transformation identique. On voit aussi qu'il n'y a que deux relations symétriques de la forme indiquée admettant les mêmes valeurs critiques.

II. — APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

9. *Polynômes inscrits à une conique et circonscrits à une autre.* — Soient x et y deux valeurs d'un paramètre servant à représenter d'une manière univoque les points d'une conique (C), A et B les points correspondants aux valeurs respectives de x et y . On sait que, si x et y sont liées par une relation homographique involutive, la droite mobile AB passe par un point fixe, tandis que si x et y sont liées par une relation homographique non involutive, la droite AB enveloppe une conique bitangente à la conique (C); on s'en assure en remarquant que toute droite de l'ensemble coupe la conique (C) en deux points M et N dont l'un correspond à la valeur de x , et l'autre à la valeur de y . Si l'on se donne un point M de la conique, ce point correspond soit à la valeur de x , soit à celle de y . Suivant qu'on choisira l'une ou l'autre correspondance, à ce point M correspondra soit un point N, soit un point N', lesquels seront différents dans le cas général et ne se confondront que dans le cas de l'involution. Dans le cas général, il passera donc par le point M deux droites de l'ensemble, ce qui prouve que la droite MN enveloppe une conique (D). De plus, parmi tous les couples de valeurs de x et y , il y en a deux, et deux seulement pour lesquels $x = y$. Pour chacun de ces couples, les deux points A et B se confondent et la droite AB est tangente à la conique (C); mais en même temps, les deux droites de l'ensemble qu'on peut mener du point A se confondent aussi, ce qui prouve que les deux tangentes menées de A à la conique (D) se confondent, et que par conséquent la droite AB est tangente en A à la fois à la conique (C) et à la conique (D). Comme il en est de même du point A' correspondant à l'autre couple de valeurs égales, les deux coniques sont bien bitangentes.

Si x et y sont liées par une relation doublement quadratique symétrique, nous avons vu au n° 5 que la droite AB enveloppe une conique (D) et que les valeurs critiques de la relation doublement quadratique symétrique définissent les points communs

à ces deux coniques. Si deux valeurs critiques sont égales, les deux coniques sont tangentes. Si les valeurs critiques sont égales deux à deux, la relation doublement quadratique se décompose en deux relations homographiques. A cause de la symétrie; il faudra ou que ces deux relations soient symétriques l'une de l'autre, ou qu'elles soient chacune symétrique, c'est-à-dire involutive. Dans le premier cas, on retombe sur la relation homographique dont nous venons de parler, et il convient de remarquer que chacune de ces relations homographiques symétriques l'une de l'autre définit la même conique (D), de sorte que la droite AB enveloppe une conique bitangente à la conique (C). Dans le second cas, chacune des droites AB et AB' qu'on peut mener par un point A de (C) passe par l'un ou l'autre des deux points fixes; la conique (D) se réduit à ces deux points fixes; mais, quand on déplace le point A d'une manière continue sur la conique (C), l'une des droites pivote autour d'un point fixe, et l'autre autour de l'autre.

Réciproquement, toute conique (D) définit par l'intersection de ses tangentes avec la conique (C) une relation doublement quadratique symétrique entre les paramètres des points de (C).

Enfin, on pourrait faire le raisonnement corrélatif, et mener des tangentes à la conique (C). Le point d'intersection des deux tangentes correspondant aux deux points homologues A et B décrit une conique (E), et les valeurs critiques de x correspondent aux tangentes communes à ces deux coniques.

On déduirait facilement de ce qui précède les propriétés des polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre; mais ce serait répéter à peu de chose près ce qui a été déjà expliqué dans le travail déjà cité (1).

10. *Polygones inscrits à une conique dont les côtés sont tangents à plusieurs coniques faisant, avec la première, partie d'un même faisceau.* — Soient $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, n valeurs du paramètre servant à définir le point A sur la conique (C). Supposons que ces n valeurs vérifient les $n - 1$ relations doublement

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XLIII, 1915, p. 146-160.

quadratiques symétriques :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0, & f_2(x_2, x_3) &= 0, \\ f_3(x_3, x_4) &= 0, & \dots, & f_{n-1}(x_{n-1}, x_n) = 0 \end{aligned}$$

qui toutes ont *les mêmes valeurs critiques*.

Les droites $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$ enveloppent chacune une conique, et toutes ces coniques coupent la conique (C) aux quatre mêmes points puisque les valeurs critiques sont les mêmes dans toutes les équations.

Si l'on élimine x_2 entre les deux premières, on sait (n° 7) que l'équation résultante se décomposera en deux relations doublement quadratiques symétriques ayant les mêmes valeurs critiques, sauf toujours le cas particulier du n° 8, dont l'une sera par exemple $g_3(x_1x_3) = 0$. Supposons que ce soit celle-là que vérifie x_3 . Éliminons x_3 entre les équations $g_3 = 0$ et $f_3 = 0$; nous trouverons encore deux relations doublement quadratiques dont l'une sera $g_4(x_1, x_4) = 0$.

Si x_3 avait vérifié l'autre équation $g'_3 = 0$, on aurait trouvé entre x_1 et x_4 deux autres relations doublement quadratiques symétriques, soit en tout quatre.

Supposons que x_4 vérifie l'équation $g_4 = 0$ et continuons les éliminations. Finalement nous trouverons que la relation entre x_1 et x_n se décompose en 2^{n-2} relations doublement quadratiques symétriques. On aurait pu faire d'autres éliminations qui, au lieu de conserver la variable x_1 , en auraient conservé une autre, de telle sorte qu'on peut conclure que la relation qui lie deux quelconques des n variables se décompose en un certain nombre de relations doublement quadratiques symétriques qui *toutes ont les mêmes valeurs critiques*.

Considérons alors la conique (C) et les $(n - 1)$ coniques $(D_1), (D_2), (D_3), \dots, (D_{n-1})$ coupant toutes (C) aux quatre mêmes points. D'un point A_1 pris sur (C), on mène une tangente à (D_1) qui coupe (C) en A_2 , puis de A_2 une tangente à (D_2) qui coupe (C) en A_3 et ainsi de suite jusqu'à la tangente à (D_{n-1}) qui coupe (C) en A_n . On peut construire un grand nombre de ces polygones, puisque de chaque point A_i on peut mener deux tangentes à la conique (D_i) . Il résulte immédiatement des remarques précédentes que le dernier côté de l'un de ces polygones et toutes

les diagonales de l'un quelconque d'entre eux sont tangents à l'une des coniques qui correspondent aux diverses relations doublement quadratiques et symétriques qui résultent des éliminations faites entre les relations doublement quadratiques symétriques définies par les coniques (D_i) , et qui toutes font partie d'un même faisceau.

Si l'on choisit un polygone particulier $A_1 A_2 \dots A_n$, et qu'on le déforme d'une manière continue en faisant parcourir au point A_1 la conique (C) le côté $A_1 A_n$ et les diagonales de ce polygone envelopperont chacun une conique appartenant au même faisceau que les coniques (C) et (D_i) . C'est le *théorème de Poncelet*.

On peut ajouter que, si l'on considère tous les polygones (P) qu'on peut former en partant d'un même point A_1 , les derniers côtés de ces polygones enveloppent deux à deux la même conique. En effet, le nombre de ces polygones est 2^{n-1} , puisqu'on peut mener deux tangentes à chacune des coniques (D_i) . Or nous avons vu que le nombre des relations doublement quadratiques symétriques entre les paramètres des points extrêmes est seulement de 2^{n-2} . Il faut donc que deux par deux ces côtés extrêmes enveloppent la même conique. Une remarque analogue s'applique évidemment aux diagonales des polygones (P) .

Il est bien entendu qu'il peut arriver que certaines des diagonales, ou certains des côtés extrêmes des polygones (P) passent par un même point au lieu d'envelopper une conique. On en trouve un exemple dans les polygones d'un nombre pair de côtés inscrits à une conique et circonscrits à une autre, puisqu'alors les diagonales principales passent par un même point. Un autre exemple sera indiqué plus loin (n° 44).

Il est bien entendu aussi que quelques-unes des coniques (D) peuvent être confondues. Chaque fois que deux *consécutives* de ces coniques sont confondues, le nombre des relations doublement quadratiques et le nombre des polygones qu'on peut former sont chacun réduits de moitié.

Le théorème corrélatif concerne des coniques tangentes à quatre mêmes droites; l'énoncé en est trop facile à former pour que je croie utile de m'y arrêter; mais il y a un cas qui mérite d'être signalé. C'est celui où toutes les coniques (D) se confondent. Alors, le nombre des polygones (P) partant d'un même point se

réduit à deux. Le côté extrême et toutes les diagonales enveloppent des coniques faisant partie du même faisceau que (C) et (D), tandis que chacun des points d'intersection de deux côtés quelconques décrit une conique faisant partie du même faisceau tangentiel que (C) et (D).

Enfin, il peut arriver que l'enveloppe du côté extrême soit précisément la conique (D). On retrouve alors les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre avec toutes leurs propriétés.

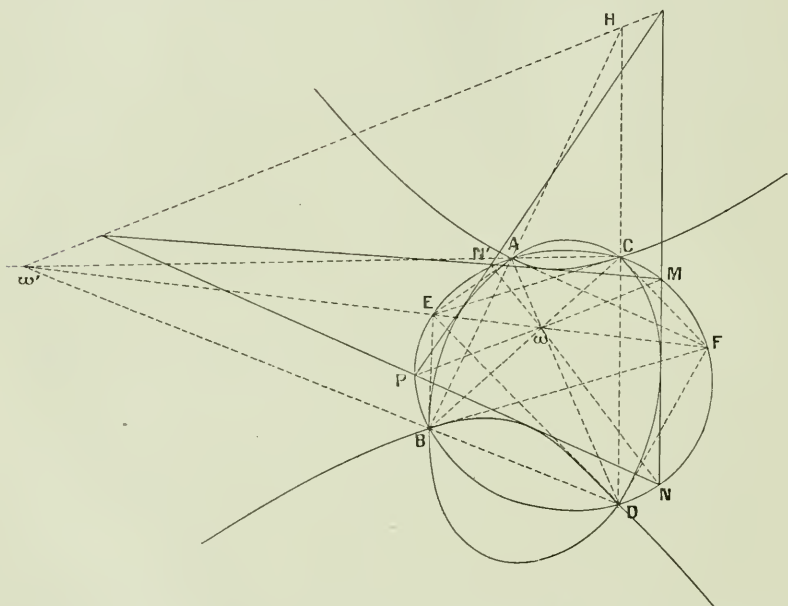
11. *Cas particulier.* — Un cas intéressant est celui où les relations doublement quadratiques symétriques données sont de la forme particulière étudiée au n° 8. Nous avons vu qu'il n'y a que deux relations symétriques de cette forme admettant les mêmes valeurs critiques. Il faudra donc admettre que les relations $f = 0$ se réduisent à deux qui seront répétées chacune un certain nombre de fois et se succéderont dans n'importe quel ordre. Les coniques (D_i) se réduiront à deux, et pour construire les polygones (P) on leur mènera des tangentes à l'une ou à l'autre dans un ordre déterminé. Je me bornerai au cas où l'on ne considère ces deux coniques qu'une seule fois chacune.

Nous avons vu au n° 8 qu'à deux valeurs critiques de x correspond une seule valeur double de z . Or, si l'on suppose que x soit le paramètre du point A et z celui du point B, quand on donne à x une valeur critique, c'est qu'on met le point A en l'un des points d'intersection des coniques (C) et (D), et le point B est l'intersection de la conique (C) avec la tangente en A à (D). La condition algébrique exprime donc que les tangentes à (D) en deux points d'intersection des deux coniques vont se couper sur la conique (C). Les deux autres valeurs critiques de x donnant aussi la même valeur double de z , c'est que les tangentes à (D) aux deux autres points d'intersection des deux coniques vont aussi se couper sur (C). C'est le cas particulier qui a fait l'objet d'un examen spécial et d'une figure dans le travail précédent.

Ici nous avons deux coniques (D) jouissant des mêmes propriétés, et le polygone (P) est un triangle. On peut construire huit de ces triangles à partir d'un point de la conique (C) puisqu'on peut commencer par l'une ou l'autre des coniques (D) et que dans

chaque cas on trouve quatre triangles. Nous avons vu à la fin du n° 8 que la résultante des deux équations doublement quadratiques se réduit à des relations homographiques involutives. Donc les troisièmes côtés de quatre des triangles mobiles passeront par un point fixe, et ceux des quatre autres triangles par un autre point fixe. Il est aisé de trouver les positions de ces deux points fixes en construisant le polygone à partir d'un des sommets du faisceau des trois coniques, et l'on obtient le théorème suivant :

Étant données une conique (C) et deux cordes de cette conique AB et CD qui se coupent en H, on trace la polaire de H



A, B, C, D sont les points communs aux trois courbes; M, N, P, N', les quatre sommets du quadrilatère situés sur l'une des courbes et dont les côtés sont tangents alternativement aux deux autres.

Parmi les courbes qui se coupent en A, l'une est tangente à EA, une autre à FA, et il y a des conditions analogues aux trois autres points B, C, D.

qui coupe la conique en E et F, et l'on joint les quatre droites EA, EB, FC, FD, puis les quatre droites FA, FB, EC, ED. Il existe une conique (D) tangente aux quatre premières droites aux points respectifs A, B, C, D, et une autre (D') tangente

aux mêmes points aux quatre autres droites. D'un point M pris sur (C) on mène à l'une des coniques (D) ou (D') une tangente qui coupe (C) en un second point N, duquel on mène à l'autre conique (D') ou (D) une tangente qui coupe la conique (C) en un second point P. La droite MP passe par l'un des deux sommets du triangle autopolaire commun aux trois coniques autres que le point H (voir la figure).

Nous avons déjà remarqué qu'à partir d'un point M de la conique (C) on pouvait construire huit triangles; mais il est visible que quatre de ces triangles ont le même troisième côté MP puisque P doit être sur l'une des deux droites $M\omega$ ou $M\omega'$ passant par les sommets du triangle autopolaire autres que le point H.

En assemblant les deux triangles qui ont le troisième côté MP commun, on obtient un quadrilatère dont MP sera l'une des diagonales. En mettant le point M en l'un des quatre sommets du faisceau, on verra quels sont les deux triangles qu'il faut assembler et finalement on pourra donner à l'énoncé du théorème la forme suivante :

Étant données trois coniques qui remplissent les conditions précédentes, on peut tracer une infinité de quadrilatères inscrits à la conique (C) et ayant leurs côtés alternativement tangents à la conique (D) et à la conique (D'). Les diagonales de chacun de ces quadrilatères se coupent en l'un des deux points ω et ω' qui sont avec H les trois sommets du triangle autopolaire commun aux trois coniques.

D'un point M pris sur la conique (C) on peut tracer quatre de ces quadrilatères : deux ont leurs diagonales qui se coupent en ω ; les diagonales des deux autres se coupent en ω' .

Enfin, les propriétés très connues des polaires montrent que les côtés opposés de l'un quelconque de ces quadrilatères se coupent sur l'un des deux côtés du triangle autopolaire commun passant par H.

Le théorème corrélatif concerne trois coniques faisant partie d'un même faisceau tangentiel, telles que deux droites joignant les points de contact d'une des coniques (D) ou (D') avec les côtés opposés du quadrilatère circonscrit commun soient tangentes à la conique (C). Le quadrilatère mobile est circonscrit à la

conique (C) et ses sommets sont alternativement sur les coniques (D) et (D'). La conclusion est la même que dans le théorème direct : les diagonales du quadrilatère mobile passent par l'un des sommets du triangle autopolaire commun aux trois coniques, et les côtés opposés de ce quadrilatère se coupent sur les côtés de ce triangle autopolaire opposé à ce sommet.

En particulierisant le quadrilatère circonscrit, on obtiendra des théorèmes concernant trois coniques homofocales ou trois paraboles confocales tangentes à une même droite, ces trois coniques satisfaisant toujours aux conditions énoncées.

12. *Extension à l'espace.* — Considérons maintenant $n - 1$ quadriques $(Q_1), (Q_2), \dots, (Q_{n-1})$ faisant partie d'un même faisceau, et projetons leur courbe commune sur l'une des faces (P) du tétraèdre autopolaire commun, en prenant pour centre de projection le sommet S de ce tétraèdre opposé à la face (P). Cette projection sera une conique (C) et les contours apparents des quadriques considérées seront des coniques $(D_1), (D_2), \dots, (D_{n-1})$ appartenant toutes, avec (C), à un même faisceau. Toutes les génératrices de l'une de ces quadriques (Q_i) se projettent suivant des droites tangentes au contour apparent correspondant (D_i) . Formons alors le polygone gauche suivant : Par un point A_1 de la courbe commune (E), je mène une génératrice de (Q_1) qui coupe cette courbe commune en un second point A_2 . De A_2 , je mène une génératrice de la quadrique (Q_2) qui coupe (E) en un second point A_3 , et ainsi de suite jusqu'au point A_n faisant partie d'une génératrice de (Q_{n-1}) . La projection sur le plan (P) du polygone $A_1 A_2 \dots A_n$ sera un polygone de Poncelet. Donc tous ses côtés et toutes ses diagonales seront tangents à diverses coniques appartenant au même faisceau que (C), $(D_1), \dots$. Soit (D_j) l'une de ces coniques et $A_i A_j$ la droite de l'espace dont la projection $a_i a_j$ est tangente à (D_j) . Par la conique (D_j) on peut faire passer une quadrique (Q_j) appartenant au même faisceau que les quadriques données et puisque (D_j) est dans le plan (P) qui est l'une des faces du tétraèdre autopolaire commun à toutes les quadriques de faisceau, (D_j) sera le contour apparent de la quadrique (Q_j) , vue du sommet S. Du point A_i on ne peut mener que deux droites rencontrant la courbe commune (E) en un second point et se proje-

tant suivant $a_i a_j$ tangente à (D_j) , et ces deux droites sont les deux génératrices de la quadrique (Q_j) passant par le point A_i . Donc, la droite $A_i A_j$ est l'une de ces deux génératrices. Si maintenant on déforme le polygone $A_1 A_2 \dots A_n$ d'une manière continue en faisant décrire au point A_1 la courbe commune (E) , on déduira de ce qui précède que le dernier côté de ce polygone et ses diagonales décriront chacun une quadrique appartenant au même faisceau que les quadriques données.

Pour obtenir le théorème corrélatif, on considérera des quadriques appartenant à un même faisceau tangentiel. Dans un plan tangent commun aux quadriques du faisceau on mènera une génératrice de (Q_1) , soit (G_1) . Par (G_1) on peut mener un second plan tangent à (Q_2) , lequel sera aussi tangent à (Q_1) puisqu'il contient (G_1) . Dans ce second plan tangent, on pourra mener une génératrice (G_2) de (Q_2) par laquelle on mènera un second plan tangent aux quadriques du faisceau, et ainsi de suite. On forme ainsi un polygone gauche par chaque côté duquel passe un plan tangent commun à toutes les quadriques du faisceau. Ce plan tangent est le plan défini par un des côtés du polygone et le côté suivant. Quand on déforme ce polygone d'une manière continue, en faisant rouler le premier plan tangent sur la développable circonscrite commune, la droite d'intersection de deux quelconques de ces plans décrit une quadrique appartenant au même faisceau tangentiel que les quadriques données.

13. *Théorèmes sur certaines familles de coniques.* — Considérons la famille des coniques qui passent par trois points fixes A, B, C , et qui sont tangentes à une même droite (D) , et coupons-les par une droite XY . Si l'on se donne un point M sur cette droite XY , on pourra par ce point M faire passer deux coniques de la famille qui couperont chacune la droite XY en un second point. Au point M correspondront donc sur cette droite deux points N et N' . Si l'on se donne l'un de ces points N ou N' , il lui correspondra de même deux points dont l'un sera évidemment le point M . On voit ainsi que les abscisses des points d'intersection de la droite XY avec les coniques de la famille sont liées par une relation doublement quadratique symétrique.

Soit E le point d'intersection des droites (D) et XY . Les deux

coniques de la famille qui passent au point E sont confondues, puisque le point E est sur la tangente (D). Soient F_1, F_2, F_3 , les points d'intersection de XY avec chacun des trois côtés du triangle ABC. Le point F_1 étant supposé sur BC, la conique de la famille qui passe par F_1 doit contenir la droite BC, et comme elle doit aussi passer par A et être tangente à (D), elle se compose de la droite BC et de la droite qui joint le point A au point où BC coupe (D). Cette fois encore, les deux coniques se confondent. On voit ainsi que les valeurs critiques de la relation biquadratique sont les abscisses des quatre points E, F_1, F_2, F_3 .

Inversement, supposons connue, entre les abscisses des points de XY, une relation doublement quadratique symétrique dont les valeurs critiques seraient les abscisses des quatre points précédents que, pour abrégé, j'appellerai *points critiques*. Nous savons que cette relation est complètement déterminée par les quatre points critiques et le point correspondant à l'un d'eux (n° 5). Soit donc E' le point qui correspond au point critique E. Par les cinq points A, B, C, E, E' on peut faire passer une conique dont la tangente en E est une droite (D_1). La famille des coniques passant par A, B, C et tangente à (D_1) définit sur la droite XY une relation doublement quadratique symétrique qui est identique à la relation donnée, d'où il suit que toutes les coniques passant par deux points qui se correspondent sur XY et par les trois points A, B, C, sont tangentes à (D_1).

Si l'on se rappelle que les deux racines d'une relation doublement quadratique correspondant à une même valeur d'une des variables sont liées elles-mêmes par une relation doublement quadratique symétrique (n° 4), que la résultante de deux relations doublement quadratiques symétriques se décompose en deux relations doublement quadratiques symétriques, et enfin que toutes ces relations ont les mêmes valeurs critiques, on obtiendra les théorèmes suivants :

1° *Étant donnés trois points A, B, C, et deux droites (D) et XY qui ne passent ni l'une ni l'autre par aucun de ces trois points, on peut, par un point M de XY, faire passer deux coniques tangentes à (D) et passant par A, B, C. Ces coniques coupent XY en deux autres points N et N'. Quand le point M*

parcourt la droite XY , la conique passant par les cinq points A , B , C , N , N' reste tangente à une droite fixe qui passe par l'intersection E des droites (D) et (XY) .

2^o Menons par le point E une suite de droites (D) , (D_1) , (D_2) , ..., (D_{n-1}) . Par un point M de XY faisons passer une conique tangente à (D) et passant aussi par les trois points A , B , C . Cette conique coupera XY en un second point M_1 . Par M_1 et A , B , C faisons passer une nouvelle conique tangente cette fois à (D_1) , laquelle coupera XY en M_2 ; par M_2 et A , B , C faisons passer une conique tangente à (D_2) et ainsi de suite, jusqu'au point M_n . Enfin par deux quelconques des points M , M_1 , M_2 , ..., M_n et les trois points A , B , C faisons passer une dernière conique. Quand le point M parcourt la droite XY , cette dernière conique reste tangente à une droite fixe passant par E .

On peut remarquer que le premier théorème, plus simple, est un cas particulier du second qu'on obtient en supposant que les droites (D_i) se réduisent à deux qui coïncident.

Si l'on suppose que deux des trois points A , B , C sont les points cycliques, toutes les coniques précédentes deviennent des cercles, et les énoncés se simplifient un peu.

Dans le théorème corrélatif que je ne crois pas utile d'énoncer complètement, les trois points sont remplacés par trois tangentes. Si deux de ces tangentes sont des droites isotropes, on a un théorème concernant des coniques confocales qui peut s'énoncer ainsi :

Soient A un point fixe, une suite de points B , B_1 , B_2 , ..., B_{n-1} alignés sur A , un autre point fixe quelconque F et une droite fixe (D) . Je considère une conique (C) de foyer F , passant par B , et tangente à (D) . Par A , on peut mener à cette conique deux tangentes dont l'une sera désignée par AX_1 . Il existe deux coniques de foyer F tangentes à (D) et à AX_1 , et passant par B_1 . Soient AX_2 l'une des tangentes menées de A à l'une de ces coniques, puis AX_3 l'une des tangentes menées de A à l'une des coniques de foyer F tangentes à (D) et à AX_2 et passant par B_2 , et ainsi de suite. Considérons alors une conique (G) de foyer F tangente à D et à deux quelconques des droites AX , AX_1 ,

$AX_2, \dots$ Quand on fait varier la conique (C), la conique (G) passe par un point fixe situé sur la droite $ABB_1, \dots, B_{n-1}$.

Si l'on suppose la droite (D) rejetée à l'infini, on aura un théorème concernant des paraboles confocales, plus facile à énoncer.

14. *Théorèmes sur des faisceaux de coniques.* — Considérons maintenant un faisceau tangentiel de coniques et une droite fixe XY. Par un point M de XY, on peut faire passer deux coniques de ce faisceau tangentiel lesquelles coupent XY en deux autres points N et N', et l'on verra comme précédemment que les points M et N sont liés par une relation doublement quadratique symétrique. Les points critiques de cette relation sont les quatre points d'intersection A_1, A_2, A_3, A_4 de la droite XY avec les quatre côtés du quadrilatère circonscrit à toutes les coniques du faisceau tangentiel, puisque les deux coniques passant par M se confondent quand ce point M est situé sur l'une des quatre tangentes.

Inversement, donnons-nous sur la droite XY une relation doublement quadratique symétrique définie par ses quatre points critiques A_1, A_2, A_3, A_4 et le point A'_1 qui correspond à A_1 . Menons par A_2, A_3, A_4 respectivement trois droites fixes A_2X_2, A_3X_3, A_4X_4 . Il existe quatre coniques tangentes à ces trois droites et passant par les points A_1 et A'_1 . On peut associer aux trois droites précédentes, pour former le faisceau tangentiel, la tangente en A_1 à l'une de ces quatre coniques. On obtient ainsi quatre faisceaux tangentiels qui déterminent sur la droite XY la même relation doublement quadratique symétrique. Si donc M et M' sont deux points correspondants de cette relation, les quatre coniques passant par M et M' et tangentes aux trois droites A_2X_2, A_3X_3, A_4X_4 devront faire partie chacune d'un de ces quatre faisceaux; mais si l'on déforme d'une manière continue l'une de ces quatre coniques, elle restera nécessairement comprise dans le même faisceau tangentiel. De là résultent les théorèmes suivants :

1° Soient une droite fixe XY, trois autres droites fixes $(D_1), (D_2), (D_3)$, un point fixe A sur XY, une droite AZ passant par A et enfin un point mobile M sur XY. Par M on peut faire passer deux coniques tangentes aux quatre droites $(D_1), (D_2), (D_3)$ et AZ, lesquelles coupent XY respectivement en deux

autres points N et N' . Par N et N' on peut faire passer quatre coniques tangentes aux trois droites (D_1) , (D_2) , (D_3) . Quand le point M parcourt la droite XY , chacune de ces coniques reste tangente à une droite fixe passant par A .

Il y a quatre de ces droites.

2° Étant donnés toujours la droite XY , les trois droites fixes (D_i) et le point A , menons par le point A plusieurs droites AZ , AZ_1 , AZ_2 , ... Par un point M de XY faisons passer une conique tangente aux quatre droites AZ , (D_1) , (D_2) , (D_3) , laquelle coupe XY en un second point M_1 . Par M_1 faisons passer une conique tangente aux quatre droites AZ_1 , (D_1) , (D_2) , (D_3) , laquelle coupe XY en un second point M_2 , et ainsi de suite. Par deux quelconques des points M , M_1 , M_2 , ... on peut faire passer quatre coniques tangentes aux trois droites (D_i) . Quand le point M parcourt la droite XY , chacune de ces coniques, se déformant d'une manière continue, reste tangente à une droite fixe passant par A .

Ici encore, le premier théorème est un cas particulier du second.

Si l'on suppose que deux des droites (D_i) sont isotropes, on aura un théorème concernant des coniques confocales, et si l'on suppose de plus que la troisième est rejetée à l'infini, on aura un théorème concernant des paraboles confocales.

Dans le théorème corrélatif, qu'il est inutile d'énoncer, la conique variable fera partie d'un faisceau ponctuel; si l'on suppose que deux des droites D_i sont remplacées par les points cycliques, on aura un théorème concernant des cercles. Le cercle variable qui passe déjà par le point fixe D passera par un autre point fixe.

III. — DE L'INVOLUTION MULTIPLE.

15. *Définition. Propriétés fondamentales.* — Je dirai que n quantités $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont liées par une involution n -uple quand deux quelconques d'entre elles vérifient une même équation symétrique

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

de degré $n - 1$ par rapport à chacune des variables. Si l'on se

donne la valeur $x_1 = \alpha$ de l'une d'elles, les valeurs correspondantes des $n - 1$ autres seront les $n - 1$ racines de l'équation (1) où x sera considérée comme connue, et y comme inconnue. Pour qu'il y ait involution, il ne suffit pas de se donner une équation symétrique telle que l'équation (1). Il faut encore que x ayant été remplacée par α , deux quelconques des racines de l'équation (1) vérifient la même équation. Soient alors α_1 la valeur donnée à x et $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, les $n - 1$ racines de l'équation (1). Si l'on donne à x une des valeurs $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, chacune des autres valeurs, y comprise α_1 , mise à la place de y doit vérifier l'équation (1). Comme cette équation n'a que $n - 1$ racines, on voit que, quelle que soit la valeur choisie pour x parmi les valeurs α_i , les $n - 1$ racines de l'équation seront les $n - 1$ autres valeurs α_j . En d'autres termes la valeur de x et les $n - 1$ valeurs de y forment un *groupe* de n quantités qui change seulement quand on donne à x une valeur non comprise dans ce groupe. On peut ajouter que deux groupes différents n'ont aucune valeur commune, car si α_i était une de ces valeurs communes, l'équation (1), après qu'on y aurait remplacé x par α_i devrait admettre pour racines les $n - 1$ autres valeurs du premier groupe et aussi les $n - 1$ autres valeurs du second groupe. Comme elle n'est que du degré $n - 1$, il faut que toutes ces racines du second groupe soient respectivement égales à celles du premier, et les deux groupes sont identiques.

On peut former une équation du $n^{\text{ième}}$ ordre admettant pour racines les n valeurs du groupe. Cette équation contiendra de plus un paramètre λ , puisque le groupe des racines peut changer avec la valeur de x . Or, quand on se donne la valeur de x , les n racines de l'équation sont complètement déterminées. Donc le paramètre λ est aussi complètement déterminé. L'équation considérée doit donc contenir ce paramètre au premier degré et pourra s'écrire :

$$(2) \quad g(x) + \lambda h(x) = 0.$$

C'est ce que nous appellerons un *faisceau* d'équations. Bien entendu, l'un des polynomes g ou h peut être d'un degré inférieur à n , à condition qu'on lui attribue autant de racines infinies qu'il manque d'unités à son degré. Il faut aussi convenir qu'on peut attribuer à λ une valeur infinie pour laquelle l'équation du faisceau se réduit à $h = 0$.

Il est bien entendu aussi que les polynômes g et h ne doivent avoir aucun facteur commun; il en résulte manifestement que les équations du faisceau qui correspondent à deux valeurs différentes de λ n'ont aucune racine commune, car cette racine commune, si elle existait, annulerait g et h .

Réciproquement, tout faisceau d'équations de degré n définit une involution n -uple, chaque groupe de valeurs des n variables étant constitué par les n racines de l'équation du faisceau obtenue en donnant à λ une valeur particulière.

En effet, la relation qui lie deux racines quelconques x_1 et x_2 du faisceau s'obtiendra en éliminant λ entre les deux équations :

$$\begin{aligned} g(x_1) + \lambda h(x_1) &= 0, \\ g(x_2) + \lambda h(x_2) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne la résultante

$$g(x_1)h(x_2) - g(x_2)h(x_1) = 0,$$

laquelle sera bien du degré $n - 1$ par rapport à chacune des variables après qu'on l'aura débarrassée du facteur évident $x_1 - x_2$.

Si le faisceau d'équations est du second degré, on retombe sur l'involution ordinaire qui, dans notre nomenclature, doit s'appeler l'involution *double*.

16. Application aux coniques. — Si x_1 et x_2 sont les paramètres variables de deux points A_1 et A_2 d'une conique, et s'ils sont liés par une relation symétrique de degré $n - 1$ par rapport à chacun d'eux, la corde A_1A_2 enveloppera une courbe de la $(n - 1)^{\text{ième}}$ classe. Soit en effet A un point d'une conique dont le paramètre est α . Pour avoir une droite de l'ensemble passant par A , il faut donner soit à x_1 , soit à x_2 la valeur α et prendre pour valeur de l'autre variable l'une des racines de l'équation (1), chercher le point A' qui correspond à cette racine et le joindre au point A . Cela fait en tout $2(n - 1)$ cordes; mais à cause de la symétrie de l'équation, on obtient les mêmes racines quand on donne la valeur α soit à x_1 , soit à x_2 ; toutes les cordes obtenues coïncident donc deux à deux, et il n'y en a que $n - 1$ qui passent par le point A , ce qui établit la proposition.

De même si (T_1) et (T_2) sont les tangentes à la conique aux

points A_1 et A_2 , le lieu du point d'intersection de ces tangentes est une courbe d'ordre $n - 1$.

Considérons alors un faisceau d'équations de degré n . A chaque valeur de λ correspondent n points sur la conique et, par conséquent, un polygone inscrit et un polygone circonscrit, chacun de n côtés. Nous dirons qu'ils forment un *faisceau* de polygones inscrits et un faisceau de polygones circonscrits. Il est évident que chacun de ces faisceaux est complètement déterminé par deux polygones que nous appellerons les *bases* du faisceau.

Appliquons alors les remarques précédentes et observons que les paramètres de deux points qui dépendent de la même valeur de λ vérifient, quelle que soit λ , la même relation involutive : nous trouvons les propositions suivantes :

Tous les côtés et toutes les diagonales de chacun des polygones de n côtés inscrits à une conique et faisant partie d'un même faisceau restent tangents à une même courbe de la $(n - 1)^{\text{ième}}$ classe.

Tous les sommets et tous les points d'intersection de deux des côtés d'un polygone variable de n côtés circonscrit à une conique et faisant partie d'un même faisceau décrivent une même courbe du $(n - 1)^{\text{ième}}$ ordre.

Il en résulte immédiatement que les côtés et les diagonales des deux polygones inscrits servant de base au faisceau, lesquels sont quelconques, sont tangents à une même courbe de la $(n - 1)^{\text{ième}}$ classe. De même les sommets et les points d'intersection des côtés de chacun des deux polygones de n côtés circonscrits à une même conique sont situés sur une même courbe du $(n - 1)^{\text{ième}}$ ordre.

Si $n = 2$, le faisceau des polygones inscrits se réduit à un faisceau de cordes ; l'involution est double ; ces cordes passent toutes par un même point : c'est le théorème de Frégier avec le théorème corrélatif.

Si $n = 3$, on obtient un faisceau de triangles inscrits en coupant la conique donnée (C) par les diverses coniques d'un faisceau dont l'un des sommets serait sur cette conique (C) elle-même. Réciproquement, soient ABC , $A'B'C'$ deux triangles inscrits quelconques servant de base au faisceau. Marquons sur la conique (C) un point D, et dans le plan un point E non situé sur cette conique. On peut construire deux coniques passant l'une par les cinq points

A, B, C, D, E, l'autre par A', B', C', D, E. Ces deux coniques définissent un faisceau dont les diverses coniques détermineront par leur intersection avec la conique (C) un faisceau de triangles inscrits qui aura bien pour bases les deux triangles primitifs. On en déduit les propositions suivantes :

1° *Si deux triangles sont inscrits à une même conique, leurs six côtés sont circonscrits à une autre conique, et corrélativement :*

Si deux triangles sont circonscrits à une même conique, leurs six sommets sont sur une autre conique.

Ces deux propositions très connues sont du reste faciles à démontrer par l'application des théorèmes de Pascal et de Brianchon.

2° *Étant donnée une conique (C), si on la coupe par une conique variable faisant partie d'un faisceau dont l'un des sommets est sur (C), les trois autres points d'intersection forment un triangle variable qui reste circonscrit à une autre conique.*

3° Théorème corrélatif qu'il est inutile d'énoncer.

4° *Réciproquement, si l'on considère tous les triangles inscrits à une conique et circonscrits à une autre, et si, par les trois sommets du triangle mobile, un point fixe de la conique circonscrite et un point non situé sur cette conique, on fait passer une nouvelle conique, cette dernière conique variable passera constamment par deux autres points fixes.*

5° *Si de plus on construit une conique tangente aux trois côtés du triangle mobile, tangente aussi à une tangente fixe à la conique inscrite et à une autre droite fixe non tangente à la conique inscrite, cette conique variable restera tangente à deux autres droites fixes.*

Ces deux dernières propositions, corrélatives l'une de l'autre, sont aisées à démontrer par l'absurde si l'on observe que le triangle mobile fait bien partie d'un faisceau, puisque les paramètres de deux quelconques de ses sommets vérifient l'équation doublement quadratique symétrique qui exprime que la corde correspondante est tangente à la conique inscrite (n° 5).

Pour $n = 4$, on a un faisceau de quadrilatères qui peut être défini par l'intersection de la conique fixe avec les diverses

coniques d'un même faisceau. Les quatre côtés et les deux diagonales du quadrilatère mobile restent tangents à une courbe de la troisième classe; mais il peut se faire que l'équation involutive qui est du troisième degré se décompose en une du second et une du premier. Alors les quatre côtés du quadrilatère restent tangents à une même conique, les deux diagonales passent par un point fixe, et l'on retombe sur un quadrilatère de Poncelet, avec toutes ses propriétés. On obtient alors les théorèmes suivants :

1° *Étant donnés deux quadrilatères inscrits à une conique et circonscrits à une autre, on fait passer, par les quatre sommets de chacun d'eux et un point quelconque du plan, deux coniques qui déterminent un faisceau. Chacune des coniques du faisceau coupe la conique circonscrite en quatre points qui sont les sommets d'un quadrilatère de Poncelet inscrit et circonscrit aux deux coniques primitives.*

2° *Corrélativement, on considère les deux coniques tangentes aux quatre côtés d'un des deux quadrilatères donnés et à une droite fixe. Elles déterminent un faisceau tangentiel. Les tangentes communes à la conique inscrite aux deux quadrilatères et à chacune des coniques de ce faisceau tangentiel sont les quatre côtés d'un polygone de Poncelet inscrit et circonscrit aux deux coniques primitives.*

On peut signaler certains cas particuliers : Si les deux quadrilatères primitifs sont inscriptibles chacun dans un cercle, on obtiendra un faisceau de cercles, et par conséquent tous les quadrilatères du faisceau seront inscriptibles, les cercles circonscrits aux divers quadrilatères étant ceux du faisceau.

Si les deux quadrilatères primitifs peuvent être circonscrits à deux coniques homofocales, le faisceau tangentiel sera celui des coniques homofocales à ces deux-là, chacun des quadrilatères du faisceau sera circonscrit à l'une de ces coniques homofocales.

On peut prendre pour la droite fixe la droite de l'infini, et l'on aura un faisceau tangentiel de paraboles. En particulier, si les deux quadrilatères primitifs peuvent être circonscrits à deux paraboles confocales, tous les autres seront circonscrits aux diverses paraboles confocales du même faisceau tangentiel.

3° Réciproquement, *considérons tous les quadrilatères inscrits à une conique et circonscrits à une autre ; par les quatre sommets de chacun d'eux et un point fixe faisons passer une conique. Cette conique variable passe par trois autres points fixes. Corrélativement, la conique variable tangente aux quatre côtés du quadrilatère et à une droite fixe reste tangente à trois autres droites fixes.*

D'une manière générale, la suite des polygones de Poncelet de n côtés inscrits à une conique et circonscrits à une autre forme un faisceau, puisque les n sommets sont connus sans ambiguïté dès qu'on se donne l'un d'entre eux. On sait que, dans ce cas, toutes les diagonales du polygone restent tangentes à certaines coniques ou passent par certains points fixes (n° 12). On se trouve ainsi en présence d'un cas de décomposition remarquable : l'équation involutive (2) se décompose en un certain nombre d'équations qui sont chacune du second ou du premier degré par rapport à chacune des variables.

17. *Cubique gauche.* — On peut supposer que les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les paramètres des divers points d'une courbe unicursale quelconque, plane ou gauche, et l'on sera conduit à considérer un faisceau de polygones inscrits à cette courbe unicursale. Peut-être pourrait-on déduire de cette considération des théorèmes plus ou moins intéressants. Je me bornerai à quelques cas particuliers.

Soit un faisceau de triangles inscrits à une cubique gauche (G). On peut réaliser ce faisceau en coupant la cubique par un plan qui tourne autour d'une droite fixe. Réciproquement, quelle que soit l'involution donnée, le plan des trois points passe par une droite fixe. En effet, le faisceau des triangles est complètement déterminé par deux d'entre eux, et il coïncide avec celui que définit un plan mobile tournant autour de l'intersection des plans de ces deux triangles.

Si l'on projette la figure sur un plan quelconque, en prenant pour centre de projection un point quelconque de la cubique (G), celle-ci se projette suivant une conique, et le triangle ABC suivant un triangle abc inscrit à cette conique ; tous ces triangles abc

forment un faisceau et sont par conséquent circonscrits à une autre conique. Donc, les trois côtés du triangle ABC sont tangents au cône perspectif qui a cette conique pour base, et l'on obtient le théorème suivant :

Si l'on coupe une cubique gauche par des plans passant par une droite fixe, tous les triangles ainsi obtenus sont circonscrits à une infinité de cônes du second ordre, ayant pour sommets respectifs les divers points de la cubique gauche.

On peut aussi considérer un faisceau de quadrilatères inscrits à la cubique gauche. Les côtés et les diagonales du quadrilatère mobile resteront tangents à une infinité de cônes de la troisième classe ayant pour sommets respectifs les divers points de la cubique gauche.

Pour obtenir un faisceau de quadrilatères, on pourra par exemple marquer deux points sur la cubique et faire passer par ces deux points deux quadriques qui définiront un faisceau de quadriques. Toutes les quadriques de ce faisceau couperont la cubique gauche en quatre autres points qui seront les sommets du quadrilatère mobile.

Il peut arriver que le cône de la troisième classe se décompose en une droite et un cône du second ordre. Dans ce cas, les diagonales du quadrilatère mobile rencontreront la droite fixe et les quatre côtés resteront tangents au cône du second ordre.

On obtient un cas de décomposition en coupant la cubique gauche par deux droites mobiles qui soient les génératrices d'une même quadrique. Ces droites rencontreront en effet toutes les génératrices de la quadrique de l'autre système. En précisant cette idée, on obtient un théorème facile à démontrer d'après ce qui précède :

Étant données deux quadriques (Q_1) et (Q_2) qui ont une génératrice commune, on établit une involution entre les génératrices de (Q_1) faisant partie du même système que la génératrice commune. Les deux génératrices d'un même couple coupent la quadrique (Q_2) en quatre points formant les sommets d'un quadrilatère gauche dont elles peuvent être considérées comme les diagonales. Les quatre côtés de ce quadrilatère variable restent tangents à une infinité de cônes du

second ordre ayant pour sommets respectifs les divers points de la cubique gauche commune aux deux quadriques (Q_1) et (Q_2) .

18. *Quadriques tangentes.* — Considérons maintenant deux quadriques tangentes en un point A. Elles se coupent suivant une courbe *unicursale* (U) du quatrième ordre, présentant en A un point double. On peut inscrire à cette courbe un faisceau de triangles. Par exemple, on peut la couper par un plan mobile tournant autour d'une droite fixe qui passe par un point de la courbe. Ce plan déterminera trois autres points d'intersection qui seront les sommets du triangle mobile.

Plus généralement, on peut marquer cinq points fixes sur la courbe (U) et faire passer deux quadriques par ces cinq points. Ces deux quadriques déterminent un faisceau de quadriques dont chacune coupe la courbe (U) en trois nouveaux points qui sont les sommets du triangle mobile.

Si l'on projette la courbe (U) sur un plan quelconque en prenant le point double A pour centre de projection, on obtiendra une conique. Alors, en raisonnant comme dans le numéro précédent, on verra que le triangle mobile reste circonscrit à un cône du second ordre ayant le point A pour sommet.

Les côtés et les diagonales des divers quadrilatères faisant partie d'un même faisceau de quadrilatères inscrits dans (U) resteront tangents à un cône de la troisième classe ayant A pour sommet. On peut obtenir un faisceau de quadrilatères plans en coupant la courbe (U) par un plan mobile tournant autour d'une droite fixe quelconque, pourvu que cette droite ne rencontre pas la courbe.

On peut aussi marquer quatre points fixes sur (U) et couper cette courbe par toutes les quadriques d'un faisceau dont la courbe commune passerait par ces quatre points.

Enfin, il peut arriver que le cône du troisième ordre se décompose en une droite et un cône du second ordre. Alors les côtés du quadrilatère mobile resteront tangents au cône du second ordre, les diagonales rencontreront la droite fixe, et, puisque sur la projection les côtés opposés se couperont sur une droite fixe, c'est que dans l'espace deux côtés opposés quelconques couperont un certain plan fixe passant par A en deux points alignés sur A. Ce

plan fixe sera du reste le plan polaire de la droite fixe par rapport au cône de sommet A passant par (U) . En utilisant comme précédemment les génératrices d'une même quadrique pour obtenir un cas de décomposition, on obtient le théorème suivant :

Établissons une involution entre les génératrices d'une semi-quadrique (Q) , et prenons les intersections de deux génératrices conjuguées avec une quadrique (Q_1) tangente à (Q) en un point A . Nous obtenons ainsi un quadrilatère gauche dont les génératrices considérées sont les diagonales. Quand on fait varier ces génératrices, les quatre côtés du quadrilatère variable restent tangents à un même cône du second ordre ayant A pour sommet.

Par le point A passent dans le plan tangent commun aux deux quadriques une génératrice AX de la semi-quadrique (Q) et une génératrice AY de l'autre semi-quadrique portée par la même quadrique. Les diagonales du quadrilatère variable rencontrent AY . Soit (P) le plan polaire de AY par rapport au cône de sommet A passant par l'intersection des deux quadriques. Deux côtés opposés quelconques du quadrilatère variable coupent ce plan (P) en deux points alignés sur A .

Le théorème corrélatif peut s'énoncer de la manière suivante :

Étant toujours données les deux quadriques tangentes et l'involution des génératrices de (Q) , on mène par les deux génératrices d'un même couple des plans tangents à (Q_1) . On obtient ainsi quatre plans formant les faces d'un tétraèdre dont les génératrices considérées sont deux arêtes opposées. Le lieu des points d'intersection des quatre autres arêtes de ce tétraèdre variable avec le plan tangent commun aux deux quadriques est une conique.

SUR L' « ANALYSIS SITUS ».

PAR M. PAUL HEEGAARD.

« Les recherches de Poincaré sur l'*Analysis situs* sont encore peu connues bien qu'elles constituent l'une des parties les plus profondes de son OEuvre mathématique. C'est pour aider à les faire connaître davantage et comprendre mieux que le Conseil de la Société mathématique a décidé la traduction et la publication du Mémoire de M. Heegaard.

» Ce Mémoire est intéressant à plus d'un titre. Qu'on s'occupe d'histoire et de critique des mathématiques ou qu'on s'intéresse aux faits mathématiques eux-mêmes on trouvera profit à le lire; on y goûtera spécialement cette sorte de géométrie cotée qui permet à M. Heegaard de décrire de façon si imagée les variétés de l'espace à quatre dimensions. Mais ce qui a décidé le Conseil de la Société mathématique à publier le travail de M. Heegaard, c'est qu'il a servi à la pensée de Poincaré.

» Au cours de l'étude faite par M. Heegaard des différents travaux sur l'*Analysis situs*, le premier Mémoire de Poincaré est très soigneusement analysé. M. Heegaard y découvre diverses incorrections ou lacunes. Sa principale critique porte sur ce théorème fameux que les nombres de Betti équidistants des extrêmes sont égaux. M. Heegaard trouve la démonstration de Poincaré insuffisante; il estime d'ailleurs que le théorème est faux. Poincaré reconnaît que sa démonstration est incomplète, mais il croit à l'exactitude du théorème.

» Une telle divergence d'opinion ne peut provenir que d'un malentendu; en effet, la définition des nombres de Betti n'est pas la même pour Poincaré et pour M. Heegaard. C'est pour mettre clairement cela en évidence et pour établir le théorème en litige, au moins pour les variétés à trois dimensions, que Poincaré a écrit le premier supplément à l'*Analysis situs*.

» Quand, après avoir lu les explications de Poincaré, on se reporte à son premier Mémoire, tout apparaît clairement. Le

malentendu provient de la définition des homologies, antérieure à celles des nombres de Betti. Quand Poincaré écrit : « Les homologies peuvent se combiner comme les équations ordinaires », en réalité, il précise ou plutôt il étend le sens de la définition des homologies qu'il vient de formuler quelques lignes auparavant. Si l'on n'entendait pas la définition des homologies comme le fait Poincaré, bien des points de son Mémoire deviendraient incompréhensibles.

» La pensée de Poincaré n'a donc pas varié, et cependant il semble bien, quand on étudie la démonstration insuffisante qu'il a donnée, que c'est la critique de M. Heegaard qui l'a conduit à préciser nettement cette pensée, pour lui-même.

» Cela suffit à justifier la publication que nous faisons ici; mais, en un moment où les nations sont particulièrement jalouses de la renommée de leurs savants, est-il opportun de répandre le Mémoire de M. Heegaard? Poincaré n'a jamais soigné sa popularité mathématique; il a toujours cru devoir s'attaquer à des questions nouvelles, plutôt que de s'attarder à donner à ses travaux une forme parfaite et définitive; il n'essaie pas de cacher ses insuccès. Il a, par exemple, laissé à ses élèves le soin de publier ses admirables cours de Physique mathématique : « Il revoyait, sans doute, les épreuves de ces publications », écrit Darboux. Par exemple encore, le dernier Mémoire qu'il a publié était relatif à une question qu'il n'avait pu résoudre.

» La Société mathématique a estimé qu'elle restait fidèle à la ligne de conduite de Poincaré quand elle a publié le travail de M. Birckhoff sur le dernier théorème de Poincaré et c'est dans le même esprit qu'elle fait paraître aujourd'hui une traduction du Mémoire de M. Heegaard.

» Étudier dans tous leurs détails et prolonger les travaux de Poincaré, c'est la meilleure glorification de son Œuvre et la seule qu'il eût désirée. Peu importe qu'en étudiant les Mémoires de Poincaré sur l'*Analysis situs* nous découvriions des erreurs et des lacunes, nous savons bien que nous rencontrerons aussi des marques nombreuses de son génie.

» Le lecteur est déjà prévenu qu'il ne doit pas accepter toutes les critiques de M. Heegaard; il est nécessaire d'ajouter que la forme un peu tranchante de ces critiques peut les faire inter-

prêter dans un sens plus absolu que, sans doute, ne le voudrait l'auteur. Il ne faudrait pas croire, par exemple, que la valeur des travaux sur les fonctions algébriques de plusieurs variables soit diminuée à cause des reproches que leur adresse M. Heegaard. En effet, il importe de tenir compte des Mémoires ultérieurs de Poincaré, et d'ailleurs, les auteurs auxquels sont dus les progrès les plus essentiels dans l'étude de ces fonctions ont donné à leurs travaux une base exclusivement analytique.

» C'est ainsi que si, dans son *Traité*, M. Picard a exposé aussi le mode d'attaque des fonctions de deux variables que fournit l'*Analysis situs*, celle-ci cependant ne joue en réalité aucun rôle dans ses travaux. On y rencontre bien le langage topologique, mais pour sa signification précise il suffit de se reporter au substratum analytique des démonstrations, où, comme on se le rappelle, une équation différentielle linéaire E joue un rôle fondamental. Pour prendre un exemple, les questions de la périodicité des intégrales de différentielles totales et des intégrales doubles sont rattachées par M. Picard à l'équation E et nullement à des problèmes d'*Analysis situs*.

» La traduction du Mémoire de M. Heegaard a été faite par M. Lycke. Avant d'être soumise à l'auteur qui, après l'avoir autorisée, a bien voulu prendre la peine de la corriger, elle a été révisée par un savant des plus compétents sur la matière, M. James Alexander, dont on a pu lire, d'autre part, une exposition concise des principes de la théorie et qui a rendu, en se chargeant de ce travail, un service à la science et un hommage à la mémoire de Poincaré. »

(N. D. L. R.)

INTRODUCTION.

On connaît bien le développement que reçut la théorie des fonctions d'une variable indépendante, lorsqu'on prit en considération les valeurs imaginaires de la variable et qu'on rattacha la théorie à une exposition géométrique des quantités imaginaires.

Pour bâtir une théorie des fonctions de deux variables indépendantes, il serait donc naturel d'essayer une exposition semblable. Si une période aussi longue a passé avant que l'on ait commencé à s'occuper de cette extension naturelle, c'est sans doute, entre autres raisons, parce que les recherches pour deux variables indépendantes sont bien plus difficiles que pour une. La variété des possibilités produit des situations sans analogie dans la théorie d'une variable indépendante. Aussi M. Picard fait-il observer : « On voit, par ce qui précède, les différences profondes qui séparent la théorie des fonctions algébriques d'une variable, de la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. L'analogie, qui souvent est un guide excellent, peut devenir ici bien trompeuse. » Une difficulté pour l'exposition intuitive se trouve aussi, naturellement, dans le fait que les constructions géométriques qui jouent le rôle de surface de Riemann doivent être à quatre dimensions.

Quoique, dans nos recherches, l'analogie puisse nous faire égarer dans les détails, un aperçu général des moyens qu'on a employés dans la théorie d'une variable indépendante donnera cependant un bon plan de travail. Reprenons donc un tel aperçu.

La théorie des fonctions d'une variable indépendante est étroitement liée à celle des courbes algébriques. La géométrie sur une telle courbe aura donc une importance fondamentale.

Les recherches sont exécutées de points de vue très différents. Les plus importantes s'appuient :

I. Sur les théories de l'Algèbre élémentaire :

α. Recherches sur les polynômes adjoints, théorie créée par Brill et Nöther dans leur Mémoire *Ueber die algebraischen Functionen* (*Math. Ann.*, Bd VII, 1873).

β. Les recherches des Italiens sur les groupes linéaires de points. Ils ont essayé de débarrasser la théorie précédente de sa forme projective, de sorte qu'ils la développent indépendamment des notions de degré, classe, etc. ; cf. un compte rendu de MM. Castelnuovo et Enriques [*Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques* (*Math. Ann.*, Bd XLIII, 1897, p. 242)].

γ. Les recherches de géométrie énumérative, surtout une série de Mémoires de Zeuthen (parexemple, *Math. Ann.*, Bd III et IX).

II. Sur l'étude des fonctions transcendantes attachées à la courbe algébrique.

Ces recherches, qui ont, je crois, pour origine l'ouvrage initiateur de Riemann (1857), sont si généralement connues qu'il n'y a pas lieu de les mentionner de façon plus détaillée.

III. Sur l'étude *topologique* des surfaces de Riemann représentant la courbe algébrique.

α. Ou bien on détermine la connexion de la surface au moyen d'un théorème qui peut être considéré comme une généralisation du théorème d'Euler sur les polyèdres (Riemann, Neumann).

β. Ou bien on *perce* la surface ; et ensuite on la réduit par une déformation continue à une forme normale. A notre connaissance, cette méthode n'a été suivie que par M. Jul. Petersen (*Forelæsninger over Funktionsteori*, Kap. IV). Listing se sert, sans doute, d'un procédé semblable pour former le « diagramme » d'une figure dans l'espace, dans le but d'arriver ainsi à une extension du théorème d'Euler (*Census räumlicher Complexe*, 1862) et, d'une manière générale, Betti (1871) emploie des considérations analogues pour rechercher les nombres de connexion des espaces à n dimensions ; mais les deux Mémoires semblent avoir passé long-

temps inaperçus. Cette méthode donne un exposé très clair des circonstances traitées.

Pour la théorie des fonctions de deux variables, les transformations des surfaces algébriques jouent un rôle analogue. Il existe déjà un certain nombre d'ouvrages — principalement de date très récente — dans lesquels la chose est traitée en partant de points de vue semblables à ceux que nous venons d'énumérer.

I. RECHERCHES D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE. — *α. Polynômes adjoints.* — Cette théorie date de Clebsch (*Comptes rendus*, déc. 1868) et Nöther [*Zum eindeutigen Entsprechen...*, I et II (*Math. Ann.*, Bd II, 1869, et Bd VIII, 1874)].

β. Systèmes linéaires de courbes. — Les Italiens ont créé une théorie pour les systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface, analogue à celle des groupes de points sur une courbe, que nous avons mentionnée tout à l'heure. À l'aide de celle-ci, ils déterminent des « invariants » pour les surfaces (*cf.* le compte rendu, ci-dessus mentionné, de MM. Castelnuovo et Enriques).

γ. Les transformations des surfaces ont aussi été examinées au point de vue de la géométrie énumérative par Zenthien [*Études géométriques, etc.* (*Math. Ann.*, Bd IV)].

II. RECHERCHES PAR DES FONCTIONS TRANSCENDANTES. — Déjà dans son Mémoire (*Math. Ann.*, Bd II), Nöther considère des intégrales de la forme,

$$\iint \frac{Q(x, y, z) dx dy}{f^{\frac{1}{2}}},$$

Picard introduit des intégrales de la forme

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} P dx + Q dy,$$

où P et Q satisfont à la condition d'intégrabilité (*Journal de Liouville*, 1885 et 1886). Enfin, M. Picard donne un exposé complet de toute cette théorie dans son Mémoire couronné : *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Liouville*, 1^{re} série, vol. V, 1889) et dans un Livre récemment paru sur le même sujet (PICARD et SART, *Théorie des fonctions*

algébriques de deux variables indépendantes, 1897). Il faut aussi mentionner le Mémoire de Poincaré [*Sur les résidus, etc.* (*Acta mathematica*, vol. IX, 1887)].

III. RECHERCHES TOPOLOGIQUES. — Ici, on trouve peu de chose. Un certain nombre de points sont abordés dans les Ouvrages de M. Picard, sans que rien soit entièrement développé, puisque l'auteur préfère partout l'exposition analytique. La difficulté consiste en ce que la théorie de Riemann et Betti pour les nombres de connexion est très défectueuse et difficile à utiliser s'il s'agit de variétés à plus de deux dimensions. Poincaré a essayé de la compléter [*Analysis situs* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2^e série, Cahier I, 1895)] sans que nous pensions qu'il y ait réussi. Plus tard, M. Picard a donné sa contribution; auparavant, M. W. Dyck s'était occupé de la question [*Beiträge zur Analysis situs* (*Math. Ann.*, Bd XXXII et XXXVII)]; mais nulle part on en trouve une théorie entièrement satisfaisante. Les recherches dans cette direction doivent donc être précédées d'une théorie de la correspondance topologique des variétés dont le nombre de dimensions est supérieur à 2. Ce qu'on a fait de ce côté doit être coordonné à ce qui est mentionné au paragraphe III, α . Il n'existe pas de recherches analogues à celles mentionnées au paragraphe III, β .

Les pages suivantes ne contiennent pas d'ensemble achevé, mais seulement des études : cela tient à la difficulté du sujet. Pour que ces recherches puissent paraître sous leur véritable jour, il conviendra peut-être d'exposer d'abord la série d'idées qui m'a conduit dans mes recherches.

J'avais remarqué, par hasard, que l'on pouvait parvenir au théorème de Zeuthen-Halphen dans la théorie du genre des courbes algébriques (*Math. Ann.*, vol. III; *Bull. de la Soc. math. de France*, vol. V) par un raisonnement purement topologique; car on peut, sur deux surfaces de Riemann entre les points desquelles il existe une (μ, ν) correspondance, construire de nouvelles surfaces de Riemann se correspondant uniformément (point par point). L'équation qui exprime l'égalité entre les nombres de connexion des deux surfaces construites donne alors précisément la théorie mentionnée. Une lumière nouvelle est ainsi projetée sur cette cir-

constance, si importante pour la géométrie énumérative que le théorème de Zeuthen-Halphen peut être appliqué, sans faire de recherches infinitésimales aux points de coïncidence, tandis que ces recherches sont nécessaires pour les autres formules de correspondance (cf. *Acta mathematica*, vol. I, p. 171). Je n'entrerai pas ici dans les détails de cette théorie, d'autant moins que je l'ai trouvée, plus tard, dans un Mémoire de M. Hurwitz (*Math. Ann.*, vol. XXXIX).

Ensuite, j'avais pensé qu'on devrait pouvoir constituer une théorie analogue pour les surfaces algébriques, mais un grand travail était d'abord à faire : il fallait concevoir pour les surfaces algébriques des figures analogues aux surfaces de Riemann pour les courbes ; puis, il fallait déterminer des critères topologiques pour la correspondance uniforme entre deux d'entre elles. Et, comme il a déjà été dit, les instruments de recherche qui existaient à cette époque étaient ou insuffisants ou défectueux. C'est en essayant de corriger les fautes et de combler les lacunes que le contenu des pages suivantes a pris naissance.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR UNE REPRÉSENTATION INTUITIVE DES POINTS IMAGINAIRES D'UNE SURFACE ALGÈBRE (1).

I. — REPRÉSENTATION INTUITIVE D'UNE VARIÉTÉ À QUATRE DIMENSIONS.

Pour bien voir la connexion des points d'une courbe algébrique $y=f(x)$, on choisit d'abord une collection doublement infinie de points (plan ou sphère) en correspondance avec les valeurs complexes de la variable indépendante. Sur celle-ci, on construit alors une surface de Riemann, sur laquelle les valeurs de la variable indépendante sont représentées uniformément. Ce qui

(1) Peu après l'impression de l'édition danoise (en 1898), l'auteur s'est rendu compte que les trois premiers paragraphes de cette Partie s'accordent complètement avec un Mémoire de Lie.

caractérise principalement la connexion de la courbe algébrique est alors le nombre de feuilletts et de points de ramification de la surface de Riemann correspondante, ou plutôt le genre dérivé de ces nombres.

Pour examiner d'une façon analogue la connexion d'une surface algébrique $z = f(x, y)$, il faut d'abord former une collection quatre fois infinie d'éléments, auxquels on peut faire correspondre tous les couples de valeurs (x, y) qui s'obtiennent en donnant à x et à y indépendamment toutes les valeurs complexes possibles. En couvrant plusieurs fois cette collection et en introduisant d'une façon convenable des *surfaces de ramification* réunies par des ensembles à trois dimensions le long desquels les différentes *couches* se joignent les unes aux autres, on peut créer une variété à quatre dimensions à l'aide de laquelle la connexion d'une surface algébrique peut être étudiée. Ce qui est d'importance ici pour la connexion de la surface algébrique est surtout le nombre des couches et les qualités des surfaces de ramification. On doit partir de là pour chercher à former des conceptions analogues à celle du genre de courbes algébriques.

Il s'agit maintenant de savoir comment on choisira la variété à quatre dimensions. On pourrait se servir de la collection quadruplement infinie de droites dans l'espace. Ou bien, on choisirait, par exemple, deux plans sur lesquels on représenterait comme d'habitude les valeurs de x et de y respectivement; la ligne réunissant les points (x) et (y) pourrait alors correspondre au couple de valeurs (x, y) en question. Ou bien on utiliserait la représentation par von Standt des points d'un plan imaginaire. Ceci serait une manière très élégante de traiter la question; mais je ne crois pas qu'elle soit possible, du moins au point où en est actuellement la Science.

Cependant, puisque, dans nos recherches, tout dépend de la clarté intuitive des éléments avec lesquels nous travaillons, les procédés ci-dessus mentionnés ont trop d'inconvénients. Car il n'importe pas seulement que l'élément représentant le point (x, y) soit simple, mais aussi que l'ensemble des éléments entourant un élément donné se présente aussi clairement que possible à l'intuition. Or, il me semble presque impossible que l'intuition se fasse une idée exacte et complète de l'ensemble des droites de l'espace

formant l'entourage d'une droite donnée, tandis qu'il est facile de s'imaginer clairement le voisinage d'un point d'une surface ou d'un point de l'espace. Or, nous ne connaissons pas de variété à quatre dimensions pour laquelle un point soit un simple élément. Dans nos recherches, nous userons de la représentation suivante :

Dans un plan horizontal, choisissons deux axes perpendiculaires, X_1 et X_2 , le côté positif de X_1 s'éloignant à notre droite et le côté positif de X_2 s'éloignant devant nous. Sur ce plan, nous représenterons, comme d'ordinaire, les valeurs complexes de $x = x_1 + ix_2$. Maintenant, pour représenter le y_1 et le y_2 entrant dans $y = y_1 + iy_2$, nous considérerons comme éléments non pas les points de l'espace tout simplement, mais ceux-ci investis d'une valeur réelle numérique.

Au point (x) , nous élevons un segment de ligne de longueur y_1 , perpendiculaire au plan $(X_1 X_2)$ (direction positive vers le haut) et nous imaginons le point final désigné par le chiffre y_2 .

Le procédé est semblable à celui qui est employé par l'arpenteur lorsque, sur une carte, il doit représenter et étudier les points de l'espace : ceux-ci sont remplacés par leurs projections sur le plan du dessin et les projections sont munies d'un chiffre de cote indiquant la hauteur au-dessus ou la profondeur au-dessous du plan ; pour le chiffre de cote 0, nous aurons le plan même du dessin.

Tout l'ensemble d'éléments ou, comme nous dirons, de points, que nous considérons, peut être obtenu si nous pensons d'abord aux points de notre espace ordinaire supposés munis du chiffre de cote 0, et si, ensuite, nous faisons parcourir à tous les chiffres de cote d'abord les valeurs de $0 \text{ à } +\infty$, puis celles de $0 \text{ à } -\infty$. Nous désignerons cet ensemble par **T**. Par analogie à ce que fait l'arpenteur, nous pouvons alors dire que les points de l'espace à quatre dimensions sont représentés par projection sur l'espace ordinaire : nous entendons par la projection d'un point, le point obtenu en effaçant son chiffre de cote (ou, plutôt, en le remplaçant par zéro).

Pour plus de commodité, nous emploierons des noms et des désignations dont l'analogie avec quelque chose de connu est facile à voir. L'ensemble des points obtenus en munissant un point ordinaire de l'espace successivement de tous les chiffres de cote de $-\infty$ à $+\infty$ sera dit une droite *perpendiculaire* à notre espace. De façon analogue se définissent un plan perpendiculaire et un

espace plan perpendiculaire à notre espace, à l'aide, respectivement, d'une droite et d'un plan. Si une variété dans **T** est projetée sur notre espace suivant une variété ayant une dimension de moins, mais portant en revanche un nombre infini de chiffres de cote à chaque point, nous l'appelons *pseudo-verticale*. Si, au contraire, le nombre de dimensions n'a pas changé, et si le chiffre de cote est le même partout sur la variété, nous l'appelons *pseudo-horizontale*. Nous dirons que les points à chiffres de cote positifs sont situés *au-dessus* de notre espace; les points à chiffres négatifs, *au-dessous*. On dira que la projection sur notre espace d'une variété quelconque est *la porteuse* de celle-ci.

Nous désignerons dans la suite les variétés à quatre dimensions par des caractères latins gras; celle que nous venons de construire s'appelle **T**. Les espaces ou variétés à trois dimensions seront désignés par des majuscules grecques, notre espace ordinaire par P. Les surfaces seront désignées par des minuscules grecques (φ , π), les lignes par des majuscules latines (L) et les points par des minuscules latines (p).

Une courbe T se représente donc tout simplement par sa projection, sa courbe porteuse, en munissant les points de celle-ci de chiffres de cote.

La porteuse d'une surface est d'ordinaire une surface; pour se rendre compte facilement des chiffres de cote de celle-ci, on joint par des courbes les points qui ont même chiffre de cote. La surface cherchée est absolument déterminée par le système de lignes de cote qui couvrent ainsi la surface porteuse.

De même que la projection d'une surface sur un plan couvre, d'ordinaire, plusieurs fois certaines parties du plan et que ces parties sont limitées par des courbes (le contour); ainsi la projection d'un *espace* sur P sera, d'ordinaire, un espace couvrant plusieurs fois certaines parties de P, et ces parties seront limitées par des surfaces (les surfaces de contour). Les chiffres de cote seront déterminés par des surfaces de cote passant par les points à même chiffre de cote.

Quand on déforme les figures que nous venons de décrire, il faut non seulement observer ce que devient la porteuse, mais aussi examiner les déplacements subis par les chiffres de cote.

Sur la base donnée, on peut aisément définir ce qu'il faut

entendre par une droite, un plan et un espace plan dans **T**, ainsi qu'exposer les qualités descriptives générales de ceux-ci. Une collinéation de l'espace peut être réduite à des projections centrales, etc. Nous ne parlerons point de cela. La géométrie métrique dans **T** pourrait être basée, par exemple, sur une définition de la distance entre deux points

$$d = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (y_1 - \eta_1)^2 + (y_2 - \eta_2)^2},$$

ou en développant la notion de coïncidence avec, pour base, la définition donnée ci-dessous de la rotation autour d'un plan, en réduisant ainsi la question à une question concernant notre espace. Pour exposer la définition de la rotation, dont nous venons de parler, nous définirons d'abord ce qu'il faut entendre par un cercle dans un plan *pseudo-perpendiculaire*. La projection de ce cercle doit être un segment de droite *ab* sur la trace du plan dans P, et les chiffres de cote du segment doivent être déterminés par

$$y_2 = c \pm r \sin \mathfrak{Z},$$

où *c* est une constante réelle, $2r = ab$, et $r \cos \mathfrak{Z}$ la distance du milieu de *ab* au point variable. Le point du milieu ayant le chiffre de cote *c* est appelé le *centre* du cercle, *r* son *rayon*. On fait tourner un point *p* dans P autour d'un plan *pseudo-horizontal* π en faisant décrire au point le cercle *pseudo-vertical* qui le traverse et qui est projeté sur P suivant un segment de droite, dont les points extrêmes sont symétriques par rapport à la projection de π sur P. Pendant la rotation, la projection fait la navette sur une droite dont les extrémités sont symétriques par rapport à la projection du plan de rotation. Le carré de la plus grande distance de cette projection est égal à la somme du carré de la distance à un instant quelconque et du carré du chiffre de cote correspondant. Le point passe alternativement *au-dessus* et *au-dessous* de P.

Un espace plan coupe P suivant un plan; toute figure de cet espace peut donc être rabattue sur P par une rotation autour de la trace.

Maintenant, il n'est plus difficile d'exposer les notions métriques fondamentales, l'angle, la distance, etc.

On voit aussi comment, par rotation, on peut transformer deux

corps symétriques l'un dans l'autre (par exemple, par rotation autour d'un plan de symétrie), et de même comment un point entouré dans P d'une surface fermée peut être amené hors de celle-ci sans passer par la frontière.

II. — LA DROITE.

Notre exposé de la planimétrie analytique a cet avantage, que les résultats intuitifs, auxquels on arrive en s'en tenant aux coordonnées réelles, se trouvent être des cas spéciaux des résultats intuitifs que nous obtenons ici. Car les points à chiffre de cote 0 situés dans le plan X_1Y_1 sont les points réels ordinaires.

Examinons d'abord l'ensemble de points donné par l'équation

$$y = x.$$

Si l'on met

$$x = x_1 + ix_2,$$

$$y = y_1 + iy_2,$$

$$z = x_1 + ix_2,$$

et si l'on sépare les parties réelles et imaginaires, on a

$$(1) \quad y_1 = x_1 x_1 - x_2 x_2,$$

$$(2) \quad y_2 = x_1 x_2 + x_2 x_1.$$

(1) est l'équation d'une surface porteuse dans un système rectangulaire de coordonnées avec X_1 , X_2 et Y_1 pour axes. Elle représente un plan passant par l'origine. Si l'on marque le point $x_1 + ix_2 = \frac{1}{z}$ dans (X_1, X_2) , la droite joignant ce point à l'origine sera perpendiculaire à la trace du plan; la valeur de y_1 à ce point, est 1. Ainsi la position du plan est facilement déterminée.

(2) détermine les projections des lignes de cote sur le plan (X_1, X_2) , y_2 étant considéré comme paramètre. Ces projections étant perpendiculaires à la trace du plan (1), les lignes de cote deviennent les lignes de pente du plan.

La ligne de pente passant par l'origine correspond à $y_2 = 0$; elle contient le point que nous venons de construire, déterminé par

$$x_1 + ix_2 = \frac{1}{z} = \frac{x_1 - ix_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

D'ailleurs, les chiffres de cote des différentes lignes de pente sont proportionnels à leurs distances à la ligne de cote $y_2 = 0$. Il suffit donc de connaître le chiffre de cote pour avoir encore une ligne de pente. Le point de la trace du plan sur (X_1, X_2) portant le chiffre de cote 1 a les coordonnées

$$\xi_1 = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \eta_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2};$$

on l'obtient donc (voir ci-dessus) en multipliant le point $\frac{1}{x}$ par i .

Le plan qui dans P représente $y = \alpha x$ se détermine donc ainsi : au point $\frac{1}{x}$ de (X_1, X_2) , on dresse une perpendiculaire de longueur 1, puis on fait passer un plan par l'extrémité de cette perpendiculaire et par le vecteur obtenu en donnant au vecteur allant de l'origine au point $\frac{1}{x}$ une rotation de 90° dans le sens positif. À la ligne de pente passant par l'origine, on donne le chiffre de cote 0, et à la ligne de pente passant par l'autre extrémité du vecteur tourné, le chiffre 1.

Si, au contraire, nous avons comme donnée un plan passant par l'origine, il est facile de déterminer par cette règle non seulement le coefficient de direction de la droite dont il devient le plan porteur, mais aussi les chiffres de cote dont les lignes de pente doivent être munies. Aux coefficients de direction de même module correspondent des plans de même inclinaison et dont les distances entre les lignes de pente de même nom sont les mêmes. Plus le module est grand, plus la pente du plan porteur est grande; plus aussi deux lignes de pente à chiffres de cote donnés se rapprochent l'une de l'autre. Pour $\alpha = 0$, nous aurons l'axe des X qui, par conséquent, est représenté par le plan $X_1 X_2$ (partout avec le chiffre de cote 0); pour $\alpha = \infty$, nous aurons l'axe des Y qui est représenté par un plan passant par Y_1 , pseudo-perpendiculaire à notre espace P. (À proprement parler, on aura aussi tout l'espace muni de chiffres de cote infiniment grands, cf. § IV. Ainsi, on obtient une transition continue, partant des lignes à module fini; le plan porteur se transforme en un plan à travers l'axe Y_1 et, dans ce plan, toutes les lignes de pente à chiffres de cote limités se sont rassemblées, tandis que la ligne de cote $y_2 = \infty$ s'est étendue sur toute la partie restante du plan.)

Il est facile de voir maintenant comment la ligne

$$y = zx + q \quad (q = q_1 + iq_2)$$

est représentée. Les équations (1) et (2) sont modifiées en

$$y_1 = (z_1 x_1 - z_2 x_2) + q_1,$$

$$y_2 = (z_2 x_1 + z_1 x_2) + q_2,$$

qui montrent que le plan porteur a été déplacé parallèlement à lui-même d'une distance q_1 et que les chiffres de cote de toutes les lignes de pente ont été augmentés de q_2 .

Les droites parallèles à l'axe des X sont représentées par des plans horizontaux à chiffres de cote constants, les droites parallèles à l'axe des Y sont représentées par des plans pseudo-perpendiculaires à P et dont les traces dans P sont parallèles à l'axe des Y .

III. — COURBES ALGÈBRIQUES.

Soit $F(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique d'ordre n en position générale par rapport aux axes. En faisant la séparation des parties réelles et imaginaires, nous aurons deux équations de la forme

$$(1) \quad y_1 = \varphi(x_1, x_2),$$

$$(2) \quad y_2 = \psi(x_1, x_2),$$

où φ et ψ sont des fonctions n -uples de x_1 et de x_2 .

(1) est l'équation de la surface porteuse. A chaque point de (X_1, X_2) doivent correspondre n valeurs réelles de y_1 ; donc la surface porteuse doit être composée de n feuillets réels s'étendant tout le long du plan illimité $X_1 X_2$; la surface ne peut évidemment pas avoir de contour sur $X_1 X_2$, mais deux valeurs de y_1 peuvent très bien coïncider sur une courbe double.

Le système de courbes (2), où y_2 est un paramètre, représente les projections des lignes de cote. Puisque y est une fonction homogène de x ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = - \frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

ce qui démontre que les deux systèmes de courbes (1) et (2) (avec, respectivement, y_1 et y_2 comme paramètres) sont des systèmes de trajectoires orthogonales. D'où résulte que *les lignes de cote sur la surface porteuse doivent être les lignes de plus grande pente.*

L'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0$$

montre que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2$$

doit être négatif; la courbure de la surface porteuse est donc partout *hyperbolique*.

Il résulte d'un calcul très facile que la tangente en un point ordinaire de la courbe est représentée par un plan touchant la surface porteuse de la courbe algébrique au point considéré; la ligne de pente du plan au point de contact est tangente à la ligne de pente de la surface porteuse, et elle a naturellement le même chiffre de cote.

A l'aide de la règle (p. 174), on pourra facilement décider dans quelle direction sur la surface porteuse les chiffres de cote des lignes de pente augmentent. Lorsqu'on monte sur la surface, les chiffres de cote à gauche vont en augmentant.

Points singuliers. — A la substitution

$$\begin{aligned} x &= x' - a, \\ y &= y' - b, \end{aligned}$$

correspond une translation du système des axes et l'addition d'une constante aux chiffres de cote. On peut donc supposer le point singulier situé à l'origine; l'aspect de la surface porteuse et le cours des lignes de cote ne seront pas modifiés. Le voisinage du point singulier est représenté par des séries de la forme

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + \dots \quad \left(\alpha = \frac{p}{q}, \beta = \frac{r}{q}, \dots \right),$$

où les exposants vont toujours en croissant et ont tous le même dénominateur. Fixons notre attention sur une seule branche de la courbe complète. Si nous introduisons le module φ et l'argu-

ment φ de l'abscisse, nous obtenons

$$y_1 + iy_2 = A \rho^\alpha (\cos \alpha \varphi + i \sin \alpha \varphi) \\ + B \rho^\beta (\cos \beta \varphi + i \sin \beta \varphi) + \dots$$

Si l'on pose

$$A = r(\cos v + i \sin v), \\ B = r_1(\cos v_1 + i \sin v_1), \\ \dots\dots\dots,$$

on obtient

$$(1) \quad y_1 = r \rho^\alpha \cos(v + \alpha \varphi) + r_1 \rho^\beta \cos(v_1 + \beta \varphi) + \dots,$$

$$(2) \quad y_2 = r \rho^\alpha \sin(v + \alpha \varphi) + r_1 \rho^\beta \sin(v_1 + \beta \varphi) + \dots$$

(1) est l'équation de la surface porteuse en coordonnées cylindriques, (2) détermine les projections des lignes de cote sur (X_1, X_2) . Si l'on ne considère que les premiers termes, en parlant des projections des courbes de niveau, on peut obtenir le dernier système en faisant une rotation de $\frac{\pi}{2\alpha}$ autour de l'origine. Considérons quelques cas spéciaux :

$$1^o \quad q = 1, \quad \alpha = 2, \quad y = Ax^2 + Bx^3 + \dots$$

Le point est un point ordinaire avec l'axe des X pour tangente. L'aspect de la surface porteuse au voisinage de l'origine est déterminé par

$$y_1 = r \rho^2 \cos(v + 2\varphi).$$

Cette surface est obtenue en construisant la branche de la parabole $y_1 = r x_1^2$ correspondant à des valeurs positives de x_1 , en faisant une rotation de son plan d'angle φ autour de Y_1 et en multipliant en même temps ses ordonnées par $\cos(v + 2\varphi)$; toute la surface est obtenue en faisant revêtir à φ toutes les valeurs de 0 à 2π . La courbe d'intersection avec un cylindre d'axe Y_1 est une ligne onduleuse qui coupe quatre fois le plan (X_1, X_2) .

En un point d'une courbe algébrique où $\frac{dy}{dx} = 0$ (sans qu'il s'y trouve d'autres particularités) la surface porteuse sera en forme de selle avec un plan tangent horizontal coupant la surface suivant deux branches de courbe perpendiculaires l'une à l'autre. Le système de lignes de cote est du même type que le système d'hyperboles à asymptotes communes. Puisque, dans celui-ci, on traverse

les asymptotes en passant d'une hyperbole à l'hyperbole conjuguée, les lignes de pente à chiffres de cote supérieurs à ceux du point de contact sont séparés des lignes de pente à chiffres inférieurs par une courbe à point double. Les branches de celle-ci, perpendiculaires l'une à l'autre, touchent le plan tangent horizontal et se coupent à angle droit; l'une d'elles est située au-dessus, l'autre au-dessous du plan. Les tangentes au point double sont les bissectrices des angles formés par les tangentes principales de la surface porteuse.

$$2^{\circ} \quad q = 2, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad y = Ax^{\frac{1}{2}} + \dots$$

On obtient ici

$$y_1 = r \varphi^{\frac{1}{2}} \cos \left(\varphi + \frac{1}{2} \varphi \right) + \dots,$$

$$y_2 = r \varphi^{\frac{1}{2}} \sin \left(\varphi + \frac{1}{2} \varphi \right) + \dots$$

En examinant d'une façon analogue la surface porteuse, on voit que la ligne onduluse sur le cylindre fait deux fois le tour avant de se fermer, et que, tout en faisant cela, elle exécute une oscillation complète. L'aspect rappelle un point de ramification ordinaire sur une surface de Riemann, attendu qu'il y a une ligne double ayant un point-pince au point considéré. La partie de ligne double où elle est isolée n'a aucun intérêt pour nous.

En ne tenant compte que du premier terme, les projections des courbes de niveau deviennent un système de paraboles homofocales. On obtient les projections des lignes de pente en tournant celles-ci autour de l'origine (le foyer) d'un angle de 180° . A chaque projection correspondent deux branches, une dans chaque feuillet, se coupant sur la ligne double. La transition entre les deux séries de lignes de pente se fait par une parabole verticale.

L'aspect de la surface porteuse est ainsi décrit en un point ordinaire où $\frac{dy}{dx} = \infty$.

$$3^{\circ} \quad q = 1, \quad \alpha = 3, \quad r = Ax^3 + Bx^4 + \dots$$

Un point d'inflexion avec tangente horizontale. La ligne ondulée se ferme après une rotation à trois oscillations. La surface porteuse consiste en un seul feuillet. La ligne de cote $y_2 = 0$ a un point

triple, et les autres lignes de cote ont chacune trois branches qui entrent respectivement dans la première, troisième et cinquième ouverture comprise entre les branches de $y_2 = 0$, ou bien dans la deuxième, quatrième et sixième.

Il en est de même pour

$$y = Ax^p + Bx^{p+1} + \dots$$

4° $q = 2, \quad \alpha = \frac{3}{2}, \quad y = Ax^{\frac{3}{2}} + \dots$

Un point de rebroussement.

$$y_1 = r \rho^{\frac{3}{2}} \cos \left(v + \frac{3}{2} \varphi \right) + \dots,$$

$$y_2 = r \rho^{\frac{3}{2}} \sin \left(v + \frac{3}{2} \varphi \right) + \dots$$

La ligne ondulée circule deux fois et exécute trois oscillations. On décrit la surface (approximativement) en employant, de la même manière que tout à l'heure, la ligne ondulée comme ligne directrice pour la branche positive de la courbe $y_1 = r x_1^{\frac{3}{2}}$ que l'on fait tourner autour de Y_1 . ($X_1 X_2$) est couvert deux fois, et l'on obtient trois lignes de ramification formant des angles de 120° à l'origine. Le cours ultérieur de ces lignes doubles, en tant que lignes isolées, ne nous intéresse pas.

5° De la même manière, on peut examiner une branche de courbe complète quelconque. On obtient la forme de la surface et le nombre des lignes de ramification en examinant la ligne ondulée le long de laquelle elle coupe le cylindre d'axe Y_1 . Elle fait p oscillations et tourne q fois autour du cylindre; il y a $p(q-1)$ lignes de ramification émanant du point, car un arc de la ligne ondulée entre un maximum et un minimum (ou *vice versa*) est traversé une fois à chacune des $q-1$ rotations suivantes, si bien qu'en tout il y aura $p(q-1)$ points d'intersection. Si le premier exposant peut être réduit, la situation devient un peu plus compliquée; mais n'allons pas plus loin dans cette direction ⁽¹⁾.

Sections coniques. — Si, dans l'équation d'une section conique, on fait, à la manière habituelle, la séparation des parties

⁽¹⁾ Ces dernières lignes contiennent une erreur d'ailleurs sans importance pour la suite. (*Note de l'Auteur.*)

réelles et imaginaires, on parvient à deux équations de la forme

$$y_2^2 + a_1 y_2 + a_2 = 0,$$

$$y_2^2 + b_1 y_2 + b_2 = 0,$$

où les coefficients sont des polynômes en x_1 , x_2 et y_1 de degrés indiqués par les indices. Par soustraction, on obtient une équation de la forme

$$(1) \quad c_1 y_2 + c_2 = 0,$$

et l'élimination de y_2 donne

$$(2) \quad c_2^2 - c_1 a_1 c_2 + c_1^2 a_2 = 0.$$

La surface porteuse est donc une surface algébrique du quatrième ordre. (1) donne, en chaque point de celle-ci, une valeur correspondante de y_2 , sauf lorsque le point est situé sur la conique le long de laquelle le plan $c_1 = 0$ est coupé par $c_2 = 0$. La surface porteuse a deux points-pince correspondant aux deux points où $\frac{dy}{dx} = \infty$; lorsqu'on s'approche de l'infini, son cours coïncide essentiellement avec celui des asymptotes.

De tout ceci, on peut conclure que les deux feuilletts de la surface porteuse se coupent suivant deux lignes doubles qui, venant de l'infini, aboutissent à deux points-pince, et que ces lignes font partie d'une hyperbole. Dans des cas particuliers, celle-ci peut se décomposer en deux droites sécantes. Les lignes de ramification de la surface porteuse peuvent alors ou bien n'être que des parties d'une de celles-ci, ou bien être composées d'un segment limité d'une des lignes et de l'autre ligne tout entière, laquelle doit alors couper le segment limité. Pour une courbe algébrique quelconque, un point double est obtenu sur la ligne de ramification chaque fois que les tangentes en deux points ayant la même abscisse sont parallèles et que, en même temps, les parties réelles de leurs ordonnées sont égales: c'est le cas, par exemple, d'une hyperbole, lorsque les tangentes parallèles à l'axe des X sont imaginaires. Les courbes $y^2 = \pm x^2 \pm 1$, dont les surfaces porteuses sont faciles à étudier, peuvent servir comme exemple de ce que nous venons d'avancer. $xy = a$ peut servir comme exemple d'une courbe à asymptote parallèle à l'axe des Y. La projection des

courbes de niveau et des lignes de cote est formée de deux systèmes de cercles tangents à X_1 et X_2 à l'origine.

Si la section conique se décompose en deux droites, la surface porteuse vient coïncider avec deux plans, la ligne de ramification est la ligne d'intersection de ceux-ci, et les deux points-pince ont coïncidé au point d'intersection des deux droites. Par le procédé inverse, il se détache donc deux points-pince du point d'intersection et, dans l'espace entre les deux, les deux feuillet se permutent.

La surface porteuse dans le cas général. — Considérons une courbe ordinaire d'ordre n ayant n tangentes parallèles à l'axe des Y , d points doubles et c points de rebroussement, et supposons qu'elle n'occupe pas une position spéciale par rapport aux axes et à la droite à l'infini. Le cours des n feuillet lorsqu'on s'approche de l'infini est déterminé par les asymptotes. Il y a donc $n(n-1)$ lignes de ramification allant à l'infini. Les points de ramification qui correspondent à $\frac{dy}{dx} = \infty$ sont dits de *première espèce*; de chacun d'entre eux part une ligne de ramification. Les points de ramification qui correspondent aux c points de rebroussement sont dits de *deuxième espèce*; de ceux-ci partent trois lignes de ramification. Aux points doubles ne correspond aucune particularité sur la surface porteuse; les points correspondants se trouvent sur la ligne de ramification, et ce qu'il y a de remarquable en un tel point est uniquement ceci : le chiffre de cote est le même dans les deux feuillet. D'ordinaire, on ne trouve pas de points doubles sur la ligne de ramification, comme nous l'avons dit ci-dessus, tandis qu'il y a bien des points triples où trois feuillet s'entrecoupent.

Supposons que la courbe soit sans point double ni point de rebroussement et soit infiniment près de se décomposer en n droites; il est alors facile de se représenter le cours des lignes de ramification : de chacun des $n(n-1)$ points de ramification de première espèce rayonne une ligne de ramification allant à l'infini, et *vice versa*, chaque ligne de ramification venant de l'infini aboutit à un point de ramification. Il y a $\frac{1}{6} n(n-1)(n-2)$ points triples sur les lignes de ramification. Si, par des déformations

continues, il naît un point double, c'est par l'union de deux points de ramification que cela se fait; s'il naît un point de rebroussement sur la courbe, il se formera sur la surface porteuse un point de ramification de deuxième espèce par la réunion de trois points de ramification de première espèce. On pourrait croire à la possibilité de traiter l'aspect de la surface porteuse pour le cas général par « la méthode des déformations continues », mais cela n'est pas sans rencontrer des obstacles. D'abord rien, sans doute, ne s'oppose à ce que le nombre des points triples puisse être modifié; ensuite, le cours des lignes de ramification peut être modifié par la formation sur elles de points doubles, comme il est décrit ci-dessus. Ceci cependant ne peut pas produire une modification essentielle de leurs cours, puisqu'il est facile de prouver qu'une ligne de ramification rayonnant d'un point de ramification ne peut, en général, pas se terminer en un autre point, mais doit s'étendre à l'infini. Car, si une ligne de ramification unit deux de tels points, on voit aisément, en se servant de la règle (p. 176) de l'augmentation des chiffres de cote, que la ligne de ramification doit être coupée par une autre ligne de ramification (pour que les feuillets puissent être échangés); mais, en décomposant ce point double, on rompt la jonction entre les deux points de ramification.

IV. — LE PLAN.

Examinons maintenant comment il faut concevoir les éléments à l'infini de $\mathbf{T}$ pour que celle-ci puisse correspondre au plan (X, Y) défini au point de vue projectif (pour d'autres points de vue, voir plus loin). Dans celui-ci : 1° toutes les droites ont un point à l'infini; 2° les droites parallèles passent par le même point à l'infini; 3° l'ensemble des points à l'infini forme une droite.

L'ensemble des points à l'infini de notre espace $\mathbf{P}$ sera désigné par $\mathbf{U}$. Toute direction dans $\mathbf{P}$ détermine un point de $\mathbf{U}$.

Les éléments de $\mathbf{T}$ correspondant aux points à l'infini du plan sont déduits, d'une part, des points à l'infini de notre espace, en munissant ceux-ci de chiffres de cote arbitraires; d'autre part, des points de l'espace à distance finie, en munissant ceux-ci de chiffres de cote infiniment grands. Les choses se passent cependant d'une

manière assez compliquée. Tous les points à l'infini d'un plan porteur, munis de leurs chiffres de cote, doivent représenter le même point, à savoir, le point à l'infini de la droite lui appartenant. D'où il résulte que le point de $\bar{U}$, déterminé par les lignes de pente situées dans des plans parallèles, représente le même point de (X, Y) , quel que soit son chiffre de cote, pourvu qu'il soit fini. Et *vice versa*, un point dans $\bar{U}$, déterminé par une direction qui n'est ni horizontale ni verticale, correspond au point à l'infini d'une droite dont les lignes de chute du plan porteur ont la direction du point donné, quel que soit le chiffre de cote du point, pourvu qu'il soit fini.

Tous les points à l'infini du plan porteur dont on approche le long de lignes autres que les lignes de pente ont des chiffres de cote infiniment élevés. Et *vice versa*, un point quelconque de $\bar{U}$ avec un chiffre de cote infini correspond à toute une collection de points à l'infini de (X, Y) , c'est-à-dire à ceux qui appartiennent à des lignes telles que leurs plans porteurs soient parallèles à la direction de P par laquelle on approche du point de $\bar{U}$ sans que les lignes de pente aient cette direction.

Les points à l'infini des plans horizontaux représentent, si le chiffre de cote est fini, le point à l'infini de l'axe des X ; si le chiffre de cote est infini, la représentation est indéterminée. Les points de $\bar{U}$ déterminés par la direction verticale avec chiffre de cote arbitraire correspondent au point à l'infini de l'axe des Y , et il en est de même des points de P à distance finie et à chiffres de cote infiniment élevés. Comme on le voit, les résultats sont assez compliqués.

Pour plus de clarté, nous imaginerons le plan (X, Y) découpé en parties qui pourront être représentées séparément sans difficulté. Ensuite, nous assemblerons les variétés à quatre dimensions représentant les parties, ou bien nous indiquerons seulement comment les points des espaces frontières se correspondent.

Espaces sphériques. — Examinons d'abord la variété à trois dimensions déterminée par l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = r^2,$$

que nous appellerons un *espace sphérique*. $y_2 = 0$ détermine une

surface sphérique de contour dont la partie intérieure est la porteuse de deux espaces, un situé *au-dessus*, l'autre *au-dessous* de P. Pour ces deux espaces, les lignes de cote deviennent des surfaces sphériques qui, pour $y_2 = \pm r$, se réduisent à un point, le centre. (A comparer avec la représentation d'une surface sphérique par la projection de ses courbes de niveau sur un plan diamétral horizontal.)

L'espace sphérique divise **T** en deux parties contenant les points dont les distances à l'origine sont respectivement plus petites et plus grandes que r^2 . Les premiers points sont projetés sur P à l'intérieur du contour, et les valeurs de leurs chiffres de cote sont comprises entre les chiffres de cote des points situés sur l'espace sphérique verticalement *au-dessus* et *au-dessous* du point.

La ligne d'intersection de l'espace sphérique et du plan qui représente $y = \alpha x$ est déterminée par

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \\ y_2 &= \alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2, \\ x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 &= r^2. \end{aligned}$$

L'équation de la projection de la courbe porteuse sur (X_1, X_2) est

$$(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2)(x_1^2 + x_2^2) = r^2.$$

La courbe porteuse est donc une ellipse dont le grand axe est le diamètre de la sphère de contour qui coïncide avec la ligne de pente du plan passant par l'origine; le petit axe est obtenu en faisant tourner la projection du grand axe sur (X_1, X_2) d'un angle de 90° . Les extrémités du grand axe divisent l'ellipse en deux parties dont les chiffres de cote ont des signes opposés, si bien que l'une des parties est *au-dessus*, l'autre *au-dessous* de P; aux extrémités du petit axe, les chiffres de cote atteignent leur valeur numérique la plus élevée.

Pour α infiniment grand, la ligne d'intersection devient le cercle pseudo-vertical

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_2 &= 0, \\ y_1^2 + y_2^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Toute droite passant par l'origine est ainsi divisée par l'espace

sphérique en deux portions de surface simplement connexes. L'une d'elles contient le point à l'infini sur la ligne; elle est définie par l'inégalité

$$|x| \geq \frac{r}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

(pour α infiniment grand, $|y| \geq r$).

Tout le plan (X, Y) est décrit par la ligne $y = \alpha x$ lorsqu'on donne à α toutes les valeurs complexes. Nous découpons d'abord la variété à quatre dimensions **A** qui se trouve à l'intérieur de l'espace sphérique Σ , dont le centre est à l'origine et dont le rayon est r . La partie qui reste de (X, Y) contient complètement la ligne à l'infini; on la coupe en deux morceaux de la façon suivante :

Toute droite $y = \alpha x$ pour laquelle $|\alpha| = 1$ contient une portion de surface extérieure à Σ , laquelle est définie par $|x| \geq \frac{r}{\sqrt{2}}$. Toutes ces portions de surface déterminent un espace **T** coupant la partie mentionnée de (X, Y) en deux parties que nous désignerons par **B'** et **C'**; **B'** sera la partie qui contient le point à l'infini de l'axe des X . **C'** sera celle qui contient celui de l'axe des Y . L'espace **T** part d'une surface τ dans Σ décrite par les bords des éléments de surface mentionnés. **T** était déterminé par

$$|\alpha| = 1, \quad |x| \geq \frac{r}{\sqrt{2}};$$

τ est déterminé par

$$|\alpha| = 1, \quad |x| = \frac{r}{\sqrt{2}},$$

ou, puisque $y = \alpha x$, par

$$|x| = \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad |y| = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

La projection de τ sur **P** est une surface cylindrique dont l'axe est Y et le rayon $\frac{r}{\sqrt{2}}$, et qui est limitée par deux cercles sur le contour de Σ . τ peut être décrit par des cercles pseudo-verticaux portés par les génératrices du cylindre.

Σ est divisé par τ en deux parties, Σ_1 et Σ_2 , par lesquelles **A** est rattaché respectivement à **B'** et à **C'**.

Transformons maintenant **B'** et **C'** de façon que leurs points viennent à distance finie.

B' est déterminé par

$$(1) \quad |z| \leq 1, \quad |x| = \frac{r}{\sqrt{1+|z|^2}};$$

donc z et $\frac{1}{x}$ sont partout limités dans **B'**.

De façon pareille, **C'** est déterminé par

$$|z| \leq 1, \quad |y| = \frac{|z| r}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

ou, si l'on pose, $z\beta = 1$, par

$$(2) \quad |\beta| \leq 1, \quad |y| = \frac{r}{\sqrt{1+|\beta|^2}},$$

et dans **C'**, β et $\frac{1}{y}$ sont partout limités.

On transforme maintenant **B'** et **C'** respectivement par

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = z, \\ \eta = \frac{r}{\sqrt{1+|z|^2}} \frac{1}{x} \end{cases}$$

et par

$$(4) \quad \begin{cases} \xi' = \beta, \\ \eta' = \frac{r}{\sqrt{1+|\beta|^2}} \frac{1}{y}, \end{cases}$$

en deux variétés **B** et **C** qui sont définies respectivement par

$$|\xi| \leq 1, \quad |\eta| \leq 1$$

et par

$$|\xi'| \leq 1, \quad |\eta'| \leq 1.$$

En représentant, comme d'habitude, ξ et η sur une variété à quatre dimensions, et de même ξ' et η' , nous obtenons que **B'** et **C'** se changent en deux variétés simples à quatre dimensions situées entièrement dans une région finie. La première est décrite par des surfaces de cercle pseudo-verticales de rayon 1 dont le centre est dans l'aire du cercle $|\xi| \leq 1$, $\eta = 0$, et dont la projection sur P est formée de segments de droite verticaux. La projection de toute la variété sur P est un cylindre droit et circulaire. La frontière se compose *tant* d'un espace pseudo-vertical $T(\mathbf{B})$ correspondant à T, qui est projeté sur la surface courbée du cylindre

sus-mentionné et qui est déterminé par

$$|\xi| = 1, \quad |\eta| \leq 1.$$

que d'un espace $\Sigma_1(\mathbf{B})$ correspondant à Σ_1 , dont la projection couvre doublement la partie de $\mathbf{P}$ contenue dans le cylindre; cet espace est déterminé par

$$|\xi| = 1, \quad |\eta| = 1.$$

Ces deux frontières sont séparées l'une de l'autre par une surface $\tau(\mathbf{A})$ correspondant à τ , décrite par les cercles pseudo-verticaux

$$|\xi| = 1, \quad |\eta| = 1.$$

Il en est de même pour $\mathbf{B}$.

La ligne à l'infini dans $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ est représentée par deux surfaces de cercle pseudo-horizontales, l'une dans $\mathbf{B}$, l'autre dans $\mathbf{C}$, définies respectivement par $\eta = 0$ et $\eta' = 0$. Leurs bords

$$|\xi| = 1, \quad \eta = 0 \quad \text{et} \quad |\xi'| = 1, \quad \eta' = 0$$

sont le lieu géométrique des centres des cercles verticaux qui constituent $\mathbf{T}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{T}(\mathbf{B})$.

Nous terminerons par un bref aperçu de la manière dont les frontières des trois variétés $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ se correspondent entre elles.

$\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ doivent être jointes le long des espaces $\mathbf{T}(\mathbf{B})$ et $\mathbf{T}(\mathbf{C})$ selon les formules

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi\xi' = 1, \\ \frac{\eta}{\eta'} = z, \end{array} \right.$$

comme on le voit par les formules (3) et (4). La variété réunie $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ est limitée par $\Sigma_1(\mathbf{B})$ et $\Sigma_2(\mathbf{C})$ et cette frontière doit être, au point de vue de la topologie, équivalente à l'espace sphérique Σ . (Nous y reviendrons plus tard.) Les formules (3) et (4) représentent la correspondance.

V. — SURFACES ALGÈBRIQUES.

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface algébrique d'ordre n , et supposons que celle-ci, considérée comme un

ensemble de points, soit une surface ordinaire (sans courbes doubles, arêtes cuspidales et points multiples) et qu'elle occupe une position générale par rapport au système de coordonnées et au plan à l'infini.

De même qu'une fonction algébrique d'une variable indépendante peut être représentée par une correspondance n à 1 sur une surface sphérique représentant les points d'une droite, ainsi la fonction algébrique $z = f(x, y)$, définie par l'équation ci-dessus, doit pouvoir être étendue par une correspondance n à 1 sur la variété à quatre dimensions représentant le plan (X, Y) . A chaque point du plan correspondent n valeurs de Z ; celles-ci seront toutes différentes lorsque la droite passant par le point et parallèle à l'axe des Z coupe la surface en n points séparés. L'ensemble des points de **T** pour lesquels ceci n'a pas lieu est appelé *la surface de ramification*. Celle-ci sera la surface représentant le contour de la surface algébrique sur le plan (X, Y) . Le contour est une courbe algébrique d'ordre $n(n-1)$ et de classe $n(n-1)^2$. Cette courbe a autant de points de rebroussement qu'il y a de tangentes principales de la surface parallèle à l'axe des Z ; ce nombre est $n(n-1)(n-2)$. Le nombre des points doubles égale celui des tangentes doubles de la surface parallèle à l'axe des Z , c'est-à-dire

$$n(n-1)(n-2)(n-3).$$

La surface de ramification, que nous désignerons par φ , est donc formée de $n(n-1)$ *feuillet*s le long de (X_1, X_2) avec $n(n-1)^2$ *points de ramification du premier type* et $n(n-1)(n-2)$ *points de ramification du second*.

Considérons maintenant chacune des parties **A**, **B** et **C** séparément. Nous nous imaginerons le rayon r de Σ comme suffisamment grand pour que **A** contienne tous les points de ramification de la surface de ramification. La partie de φ située dans **A** est désignée par $\varphi(\mathbf{A})$; elle est limitée par $n(n-1)$ courbes fermées qui peuvent être, approximativement, découpées sur Σ à l'aide des asymptotes du contour. Nous pouvons supposer sans restriction essentielle que ces courbes sont situées entièrement dans la partie de Σ que nous avons appelée Σ_1 ; — en d'autres termes : nous pouvons supposer que les parties infiniment lointaines du contour prennent leur cours entièrement dans **B**. Car aucune modification

essentielle de la division du plan exposée au paragraphe IV n'en résultera si, au lieu de déterminer $\mathbf{T}$ par $|z| = 1$, on le détermine par $|z| = k$, où k est un nombre positif quelconque.

Les parties de φ situées dans $\mathbf{B}$ sont représentées (approximativement) par n ($n-1$) surfaces de cercle pseudo-verticales

$$\begin{array}{ll} \xi = z_1, & |z_1| \leq 1, \\ \xi = z_2, & |z_2| \leq 1, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \xi = z_{n(n-1)}, & |z_1| \leq 1, \end{array}$$

où $z_1, z_2, \dots, z_{n(n-1)}$ sont les coefficients de direction des asymptotes du contour. Nous désignerons ces surfaces par $\varphi_1(\mathbf{B})$, $\varphi_2(\mathbf{B})$, ..., $\varphi_{n(n-1)}(\mathbf{B})$.

Maintenant, pour représenter les valeurs de z sur $\mathbf{A}^*$, nous sectionnons cette variété par un espace pseudo-vertical Φ dont la projection sur $\mathbf{P}$ est $\varphi(\mathbf{A})$ et qui d'ailleurs est déterminé par cette condition : que chaque point de la projection doive être donné par tous les chiffres de cote dont la valeur est entre celle dont le point doit être muni pour appartenir à φ et celle dont le point doit être muni pour appartenir à la partie supérieure de Σ ; en d'autres termes, l'espace est la partie de $\mathbf{A}$ située pseudo-verticalement « au-dessus » de $\varphi(\mathbf{A})$.

Deux segments dans $\mathbf{A}$ ayant les mêmes extrémités et ne coupant pas Φ peuvent être rattachés à une portion de surface qui, elle non plus, ne coupe pas Φ . Car nous n'avons qu'à joindre la projection des segments sur $\mathbf{P}$ à une portion de surface dont nous munissons les points d'un chiffre de cote arbitraire qui, si la portion de surface coupe la projection de φ , a seulement besoin d'être inférieur au chiffre de cote le moins élevé sur la ligne d'intersection. Les bords de cette portion de surface sont facilement rattachés aux lignes données à l'aide de fragments pseudo-verticaux, et l'on a ainsi construit une surface ayant les propriétés voulues.

D'une manière analogue, on voit que deux points quelconques dans $\mathbf{A}$ peuvent toujours être reliés par des lignes qui ne coupent pas Φ .

En un point a de $\mathbf{A}$, fixons une des n valeurs de z correspondant à ce point. Si a se meut jusqu'à un point b par deux voies différentes qui ne coupent pas Φ , et si la valeur de z varie d'une

façon continue conformément à l'équation $F(x, y, z) = 0$, nous finirons toutes les deux fois par la même valeur; ceci résulte de ce que les deux chemins ensemble forment la frontière d'une surface qui ne coupe pas Φ .

A tout point de la variété **A** sectionnée par Φ , on peut donc associer une valeur bien déterminée de z en partant de la valeur donnée. De même, en partant des $n - 1$ autres valeurs de z , on obtient n couches répandues sur **A**. Deux points situés l'un en face de l'autre près de la frontière Φ portent les mêmes n valeurs (mais non pas dans le même ordre); conformément à cela, les couches sont jointes.

La variété à quatre dimensions étendue ainsi en n couches sur **A** est désignée par **A'**; elle est limitée par un espace Σ' . Tout fragment de surface dans **A** devient le porteur d'un fragment d'une surface de Riemann dans **A'**, et les points de ramification sont situés aux points d'intersection du fragment avec $\varphi(\mathbf{A})$.

Il n'y a aucune difficulté à attacher les valeurs de z aux points de **C**, puisque, dans celle-ci, il n'y a pas de points de la surface de ramification; on obtient n variétés **C**₁, **C**₂, ..., **C**_{*n*}, tout à fait analogues à **C**.

La surface de ramification envoie, comme nous l'avons indiqué, $n(n - 1)$ portions de surface dans **B**. On associe aisément les valeurs de z ici; par exemple, à l'aide de $n(n - 1)$ espaces de ramification rayonnant de l'une des surfaces de cercle pseudo-verticales de **B** et aboutissant dans $\varphi_1(\mathbf{B})$, ..., $\varphi_{2(n-1)}(\mathbf{B})$. Le fait que toute cette variété **B'** forme un seul ensemble résulte de ce que le plan à l'infini coupe $F(x, y, z) = 0$ le long d'une courbe algébrique φ , qui, comme nous l'avons supposé, est irréductible. La partie $\psi(\mathbf{B}')$ de cette courbe située dans **B'** est portée par la surface de cercle $|\xi| \leq 1, \eta = 0$. Le reste se compose de n surfaces élémentaires portées dans **C** par $|\xi'| \leq 1, \eta' = 0$. **B'** peut être décrit tout entier par des surfaces de cercle pseudo-verticales avec centres dans le fragment de surface de Riemann $\psi(\mathbf{B}')$.

DEUXIÈME PARTIE.

sur les nombres topologiques de connexion.

VI. — TOPOLOGIE.

La méthode analytique de Descartes est, sans doute, une méthode universelle pour résoudre les problèmes géométriques; mais elle donne, d'ordinaire, des constructions bien inférieures à celles des Grecs en simplicité et en élégance. En essayant de pénétrer les principes de l'Analyse géométrique spéciale employée par ceux-ci, Leibnitz formula une série d'observations qu'il appelait *Analysis situs* ou *Geometria situs* [*Leibnitzens gesammelte Werke*, herausg. von G.-H. PERTZ, 1858 (*Mathematische Schriften*, Bd I, p. 118 : *De Analysis situs*)]. Pour cette raison, on a quelquefois appelé Leibnitz « le père de la Topologie moderne », c'est-à-dire de cette branche de la Mathématique qui vise les propriétés qualitatives des choses sans s'occuper des propriétés quantitatives, métriques. Leibnitz remarque quelque part, concernant sa théorie : « *Figura in universum præter quantitatem continet qualitatem seu formam* » ; mais en réalité sa théorie ne ressemble en rien à ce qu'on entend maintenant par « la Topologie ».

Dans les temps modernes, les mathématiciens ont commencé à s'intéresser à un grand nombre de questions topologiques. Qu'on se rappelle les recherches de Tait, Simony et d'autres sur les nœuds, les réseaux, etc.; les graphes; l'aspect des courbes graphiques; le problème de peindre et ainsi séparer les différents pays d'une carte géographique au moyen de quatre couleurs différentes; le problème de plier les timbres-poste; et, « last but not least », les multiples essais pour formuler une théorie des nombres de connexion pour les variétés à n dimensions et pour généraliser le théorème du polyèdre d'Euler, deux questions étroitement rattachées l'une à l'autre. [Voir le tableau de la littérature dans W. DYCK, *Beiträge zur Analysis situs* (*Math. Ann.*, Bd XXXII).]

L'usage est incertain, mais il serait juste de réserver à cette dernière espèce de recherches le nom d'*Analysis situs*, tandis qu'on pourrait appeler *Topologie* toutes les recherches de nature qualitative, comme Listing l'a proposé (*Vorstudien der Topologie*).

VII. — ANALYSIS SITUS.

Il sera, je pense, très difficile de formuler d'une façon inattaquable une théorie générale de la connexion d'une variété à n dimensions ; en tout cas, il vaut mieux, sans doute, étudier plus qu'on ne l'a fait jusqu'ici des cas concrets, au lieu de s'attaquer tout de suite aux généralités. En théorie, la logique devrait suffire pour une exposition mathématique, mais la pratique démontre combien puissant est le levier de cette vision qui se développe lorsqu'on applique la théorie à un grand nombre de cas concrets ; même la théorie qui a l'air la plus logique et vraisemblable peut cacher des erreurs qui ne paraissent que quand elle est contrôlée à l'aide de l'intuition.

Riemann et Betti ont été les premiers à chercher à généraliser la théorie de la connexion des surfaces, employée avec tant de succès par Riemann lui-même dans la théorie des intégrales abéliennes. Après la mort de Riemann, Betti publia un Mémoire à ce sujet [*Sugli spazi di un numero qualunque di dimensioni* (*Ann. di Mat.*, 2^e série, vol. IV, 1871)]. Il ne parle pas de collaboration avec Riemann ; mais, à juger par les fragments d'une théorie, réunis par Weber d'après les notes écrites par Riemann (RIEMANN, *Gesammelte mathematische Werke*, 2. Aufl., Fragment XXIX), Riemann a, pendant son séjour en Italie (*Ges. Werke*, p. 555), essentiellement contribué aux pensées exprimées dans le Mémoire de Betti. Dans celui-ci, on trouve pour la première fois la définition des nombres de connexion pour les variétés dont le nombre de dimensions dépasse 2. Plus tard, d'autres ont cherché à perfectionner et compléter la théorie : M. W. Dyck, dans *Beiträge zur Analysis situs* (*Math. Ann.*, Bd XXXII et XXXVII), Poincaré dans son Mémoire sur l'*Analysis situs* et M. Picard dans son Ouvrage sur les fonctions algébriques de deux variables (p. 5).

Déjà, avant de connaître ces derniers Ouvrages, j'avais décidé d'essayer une autre voie que celle de Riemann et de Betti ; je

voulais essayer de généraliser la méthode de percement de *Jul. Petersen* que je me rappelais d'après ses cours. Ce n'est que beaucoup plus tard que j'ai connu *Diagram* et *Trema* de Listing, ainsi que les recherches de Betti s'y rattachant et que je ne connaissais jusqu'à ce moment que par le résumé succinct des *Fortschritte der Mathematik*. En particulier, je trouvai déplorable que les $n - 1$ nombres de connexion ne suffisent pas, topologiquement parlant, à caractériser une variété quand $n > 2$. Lorsque j'ai connu les autres Mémoires mentionnés ci-dessus, surtout celui de Poincaré, j'ai failli regretter mon choix en comparant les méthodes élégantes rencontrées ici avec la théorie un peu lourde que j'employais; mais, comme je croyais voir que la voie choisie par moi éclaircissait des points non élucidés par l'autre méthode, et puisque, de plus, j'obtins le moyen de trouver des *criteria suffisants* pour que deux variétés à n dimensions soient équivalentes, je me décidai à continuer en dépit de toutes les difficultés. Par l'expression « deux variétés sont équivalentes », je veux dire qu'elles correspondent l'une à l'autre point pour point, de façon que deux points quelconques de l'une tendent à coïncider quand les deux points correspondants de l'autre variété en font autant. [La relation entre l'homéomorphisme de Poincaré (*Analysis situs*, § 2) et l'équivalence ainsi définie sera mentionnée plus tard.]

La question que nous rencontrons d'abord est celle-ci : quelles sont les coupures que l'on doit faire pour rendre une variété fermée (POINCARÉ, *loc. cit.*, § 1) simplement connexe? Pour résoudre cette question nous ferons usage du procédé suivant : on perce la variété, c'est-à-dire on enlève la variété élémentaire qui forme le voisinage d'un point. On crée ainsi une frontière que l'on élargit par une déformation continue de façon à enlever le plus en plus de la variété donnée. On continue ainsi jusqu'à ce que certaines parties de la frontière se rapprochent d'autres, en arrêtant la déformation en ces endroits lorsque la distance entre les parties qui se rencontrent est devenue infiniment petite. En poursuivant ainsi, on est conduit à un *diagramme* formé d'un système de variétés de dimensions inférieures à celle de la variété donnée, ou plutôt formé par le voisinage de ce système, c'est-à-dire par une variété qui, dans la $n^{\text{ième}}$ dimension, est infiniment petite. Le sys-

tème de variétés à dimension inférieure qui constitue la frontière du diagramme est appelé son *noyau*.

Ce diagramme a une signification double. *D'abord, il représente une variété qui est équivalente à la variété donnée lorsque celle-ci a été percée.* Si l'on réussit à établir des formes normales auxquelles les diagrammes peuvent être réduits, la condition nécessaire et suffisante pour que deux variétés fermées soient équivalentes devient celle-ci : que les formes normales de leurs diagrammes soient identiques. Car les variétés élémentaires enlevées par le perçement sont toujours équivalentes. Mais *le noyau du diagramme indique aussi les coupures qu'il faut faire pour rendre la variété donnée simplement connexe*; car, si l'on opère le procès d'élargissement mentionné dans l'ordre rétrograde, la variété qui reste quand on fait les coupures indiquées par le diagramme se réduira à la variété élémentaire enlevée par le perçement. Nous ferons plus tard une comparaison entre les résultats ainsi obtenus et la théorie des nombres de connexion de Riemann et Betti.

VIII. — LE DIAGRAMME DES SURFACES DE RIEMANN.

Bien que la théorie des ordres de connexion des surfaces de Riemann soit bien connue et, de plus, se trouve traitée, d'une façon assez semblable à celle que nous venons d'employer, chez Jul. Petersen (*Funktionstheorie*, Kap. IV), nous indiquerons cependant brièvement cette théorie, à cause de la suite, surtout pour montrer qu'elle peut être basée exclusivement sur le diagramme, sans utiliser la généralisation du théorème d'Euler (le théorème de l'invariance de $t - f$ pour une surface).

Envisageons la surface de Riemann comme portée par une surface sphérique. D'un point a de celle-ci nous décrivons des arcs de grand cercle joignant ce point aux f points qui définissent les points de ramification de la surface et que nous supposons d'ordres $k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_f - 1$. Nous perçons quelque part chacun des n feuillets et, par un élargissement des trous ainsi formés, nous déplaçons leurs contours jusqu'à ce qu'ils s'approchent des points de ramification, en leur faisant suivre les arcs de grand cercle que nous avons tracés, jusqu'au point a . Si nous reti-

rons de la surface quelques bandes se terminant à faux, il nous restera : 1° f éléments de surface autour des points de ramification; 2° n éléments de surface superposés au point a ; 3° $k_1 + k_2 + \dots + k_f$ bandes reliant ceux-ci avec ceux-là. Nous coupons $n-1$ de ces bandes telles que les frontières appartiennent à différentes courbes du contour et nous retirons les fragments. La surface représente maintenant un diagramme correspondant à un percement. Elle contient en tout $f+n$ éléments de surface reliés par $\Sigma(k) - n + 1$ bandes. De ces bandes, nous en utilisons $f+n-1$ pour relier les $f+n$ éléments, de sorte que le tout forme un seul élément. Du bord de celui-ci partent

$$\sum_1^f (k) - n + 1 - f - n + 1 = \sum_1^f (k-1) - 2n + 2$$

anses qui s'accouplent facilement deux à deux, de façon à former des anses doubles. En désignant par m le degré d'une quelconque des branches complètes de la courbe, on aura, sur la courbe algébrique correspondant à la surface,

$$\Sigma(k-1) = \Sigma(m-1) + n'$$

(la sommation étant étendue à toutes les branches de la courbe où $m > 1$). Le nombre d'anses constitue donc le chiffre géométrique bien connu

$$\Sigma(m-1) + n' - 2n + 2 = 2p.$$

Nous arrivons donc à une forme normale à p anses doubles. La condition nécessaire et suffisante pour que deux surfaces de Riemann soient équivalentes, topologiquement parlant, est donc qu'elles aient le même p .

Si nous désirons une forme normale pour la surface de Riemann fermée, nous pourrions, à chaque anse double, faire glisser les deux embouchures de l'une des anses jusqu'au milieu de l'autre et puis, en élargissant la première, nous ferons croître ses embouchures jusqu'à ce qu'elles coïncident avec les bords de l'autre. En fermant ensuite la surface par l'adjonction d'un morceau simplement connexe, on arrive à la forme normale de Klein : une surface sphérique à p anses en forme de tuyaux.

Ce que je viens d'exposer peut servir comme une sorte de programme pour les recherches que nous allons faire. Je mentionnerai encore une méthode pour traiter cette question qui est susceptible d'être étendue aux surfaces algébriques. Supposons donnée une courbe algébrique φ_n sans points singuliers. (S'il y a de ces points, on peut se rendre compte de la situation en opérant un passage à la limite en partant de la courbe envisagée ici.) Si l'on fait varier la courbe d'une façon continue sans introduire de points singuliers et sans altérer son degré, la surface de Riemann correspondante restera toujours équivalente à elle-même.

Nous transformerons la courbe φ_n en une courbe ψ_n qui est sur le point de se décomposer en n lignes droites situées d'une façon quelconque. Pour voir que ceci peut toujours se faire, il suffit de considérer le faisceau linéaire $\varphi_n + \lambda\psi_n = 0$. Les courbes de ce faisceau qui ont des points singuliers correspondent à un nombre fini et bien déterminé de valeurs de λ ; donc on pourra toujours faire varier λ de 0 à ∞ sans passer par aucune de ces valeurs. Représentons les droites par n surfaces sphériques concentriques de même rayon; alors, pour représenter ψ_n , nous devons remplacer chacun des $\frac{n(n-1)}{2}$ points doubles (points d'intersection des droites) par un couple de points de ramification infiniment voisins et que l'on rattachera par une ligne de ramification. En faisant une coupure le long de deux cercles, un dans chaque feuillet, autour de deux points de ramification accouplés, on détache ceux-ci de la surface et l'on déforme en un tuyau la partie détachée. De même pour les autres couples. Après avoir détaché les unes des autres les n surfaces sphériques qui restent, on applique de nouveau chaque tuyau à son tron. Or, on a besoin de $n-1$ tuyaux pour rattacher les n surfaces sphériques de façon à en former une seule; de celle-ci sortent donc

$$\frac{1}{2}(n)(n-1) - n - 1 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = p$$

anses en forme de tuyaux; c'est-à-dire que nous voilà de nouveau arrivés à la forme normale de Klein.

Si une surface fermée était unilatère, son diagramme contien-

draît, à côté des anses doubles, un certain nombre d'anses simples, chacune à une torsion ⁽¹⁾.

IX. — LE DIAGRAMME D'UNE VARIÉTÉ À 3 DIMENSIONS.

Supposons qu'une variété à 3 dimensions soit définie par

$$x_i = \theta_i(y_1, y_2, y_3) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

et par un certain nombre d'inégalités de la forme $\psi(y_1, y_2, y_3) > 0$ plus le prolongement analytique de cette partie (*voir* POINCARÉ, *Analysis situs*, § 3), ou bien, pour mieux conformer le langage au caractère de la topologie, supposons-la définie par le fait qu'elle doit naître de l'assemblage d'espaces élémentaires dont les frontières sont divisées par un réseau de lignes, en portions de surface qui sont accouplées par paires d'une façon déterminée. Cet accouplement doit être fait de façon que, dans la variété fermée, le voisinage de chaque point sur une des lignes du réseau soit un espace élémentaire. Si l'on veut que la variété ainsi définie soit d'un seul tenant, il faut que ces espaces puissent, au début, être réunis en un espace élémentaire dont la superficie satisfait alors aux mêmes conditions. Il n'y a pas de difficultés à suivre par l'intuition l'élargissement d'un percement.

Le noyau du diagramme sera formé par des portions de surface se rencontrant suivant des arcs de courbes; ceux-ci se rencontrant en des points, les points de jonction du noyau du diagramme. Nous supposerons que les portions de surface soient simplement connexes; car, dans le cas contraire, on pourrait ajouter des arcs de courbe aboutissant sur les arcs du diagramme et qui diviseraient les portions de surface en morceaux simplement connexes. Les arcs de courbe ainsi ajoutés seraient alors comptés avec les autres.

Considérons maintenant le diagramme lui-même. Chaque point de jonction est entouré d'une variété élémentaire (un élément de volume) à laquelle nous pourrions donner par exemple la forme sphérique; les arcs de courbe reliant les sphères sont entourés

(1) Il faut remarquer, cependant, qu'il n'existe qu'une surface unilatère ayant une connexion donnée et qu'il faudrait donc aller plus loin pour obtenir la forme canonique par ce moyen. (Note du Traducteur.)

d'espaces filiformes attachés aux surfaces sphériques par des petits éléments de surface. Appelons ces espaces *fils* ; ils peuvent être tracés par un élément de surface se déplaçant d'une des surfaces sphériques à l'autre; ceci peut se faire, d'ailleurs, de deux façons essentiellement différentes (*voir ci-dessous*, § XI).

L'espace entourant un élément de surface du diagramme est un espace en forme de plaque limité par deux éléments de surface formant les côtés de la plaque et par une surface en forme de bande de même connexion qu'un anneau circulaire, et qui forme le bord de la plaque. Cet espace, que nous appellerons une *plaque* , est attaché le long de son bord à une bande appartenant à la surface de la variété formée par les fils et les sphères aux points de jonction des fils. Supposons que le diagramme ait en tout a sphères correspondant aux points de jonction, b fils et c plaques. A l'aide de $a - 1$ des fils, les sphères peuvent être réunies en un seul espace élémentaire auquel on peut donner la forme sphérique, et de cette sphère centrale sortiront alors $b - a + 1 = p$ fils. Sur cette surface, dont la connexion est $2p + 1$, se trouvent c courbes fermées le long desquelles les bords des plaques doivent être attachés.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel système de fils, avec des courbes d'attachement pour des plaques, puisse représenter le diagramme d'un espace fermé est celle-ci : que les courbes d'attachement soient formées par p coupures fermées qui laissent la surface du système de fils connexe.

Car la condition nécessaire et suffisante exige que la surface, après l'addition des plaques, soit équivalente à la surface k de l'espace élémentaire enlevé par le percement, c'est-à-dire soit de la même connexion qu'une surface sphérique.

Si le diagramme correspond véritablement à une variété fermée, les deux côtés d'une plaque quelconque correspondront à deux portions simplement connexes de la surface k . Si l'on enlève la plaque du diagramme, la connexion de la surface de celui-ci se modifie en tant que les deux côtés de la plaque sont remplacés par la bande le long de laquelle la plaque était attachée, et qui est équivalente à une circonférence. Pour faire subir à k la même modification de connexion, on découpe les deux éléments de

surface correspondants et l'on relie les trous par un tuyau. Si l'on continue ainsi jusqu'à ce que toutes les plaques soient enlevées, k est remplacé par une surface sphérique munie d'autant d'anses en forme de tuyaux qu'il y avait de plaques. Cette surface doit avoir la même connexion que la surface du système de fils. (Il ne s'ensuit *nullement* que l'espace limité par elle doive être de la même connexion que le système de fils lui-même.) Nous pouvons en conclure que le *nombre des plaques doit être p* . La relation entre les deux surfaces est telle que les lignes qui, sur la surface du système de fils, passent par l'une des p bandes d'attachement correspondent aux lignes qui, sur l'autre surface, coupent l'une des p anses (courbes méridiennes). La surface du système de fils ne cesse donc pas d'être connexe lorsqu'on enlève les bandes d'attachement.

On voit clairement que la condition énoncée est suffisante si l'on observe qu'en partant de deux surfaces fermées et équivalentes et en faisant sur chacune (d'une manière quelconque) autant de coupures fermées que possible sans séparer la surface en morceaux, il restera deux surfaces équivalentes. La surface qui reste, quand on a enlevé de la surface du système de fils les p bandes d'attachement, est donc équivalente à une surface sphérique à $2p$ trous. La surface de la région qu'on obtient en attachant les plaques est donc équivalente à la surface sphérique qu'on peut obtenir en fermant les $2p$ trous par l'adjonction d'éléments de surface.

X. — VARIÉTÉS ORIENTÉES.

L'indicatrice. — Avant de continuer l'examen du diagramme, il faut intercaler quelques remarques. Trois points (a , b et c) sur une courbe fermée suffisent pour déterminer un sens positif sur la courbe ; sur une surface, on peut fixer un sens positif de rotation en fixant un sens positif sur une petite courbe fermée de la surface ne se coupant pas elle-même. Or, on peut ainsi déterminer un côté positif et un autre négatif de la surface dans la partie de l'espace entourant de plus près la petite courbe fermée. Si l'on étend cette détermination à toute la surface, il faudra distinguer entre surfaces unilatérales et bilatères. Et voilà un champ de recherches à étendre aux variétés de dimensions plus élevées ; les

directions de circulation sur les courbes et la notion des côtés positifs et négatifs des surfaces sont des notions fondamentales de la topologie.

Le voisinage d'un point sur une courbe est un petit arc dont nous désignerons les extrémités par 1 et 2, de sorte que 1, 2 indique le sens positif sur l'arc; nous appellerons 12 une indicatrice de premier ordre (cf. DYCK, *Math. Ann.*, Bd 32, p. 473) et nous dirons qu'une courbe munie d'une indicatrice est orientée. Le voisinage d'un point d'une surface est un élément limité par une petite courbe fermée; si la courbe est orientée, l'élément de surface qu'elle limite est appelé une *indicatrice de deuxième ordre*. Dans une variété à 3 dimensions définie de la façon susmentionnée le voisinage d'un point sera limité par une surface de type sphérique; si l'on munit celle-ci d'une indicatrice de deuxième ordre, on arrive à l'indicatrice de troisième ordre de la variété. De façon tout à fait parallèle, nous pourrions former une indicatrice de quatrième ordre dans **T** ou dans une variété à 4 dimensions que nous obtenons en joignant des variétés élémentaires dans **T**. La définition peut être étendue aux variétés analytiquement définies à dimensions quelconques, mais elle sera difficile à employer sous cette forme si la variété ne s'offre pas à l'intuition. Pour nous, les recherches n'ont donc d'importance que lorsque le nombre de dimensions est inférieur à 5. L'indicatrice de $n^{\text{ième}}$ ordre contient une série d'indicatrices successives des ordres $n - 1$, $n - 2$, . . . , 1, cette dernière étant l'arc 12. L'indicatrice peut être déplacée dans la variété; alors, si elle est ramenée à sa position initiale, on peut toujours s'arranger de sorte que les indicatrices successives jusqu'à celle de deuxième ordre reviennent aussi. Il existe alors deux possibilités : ou bien 12 peut être ramené à sa position ancienne 12, ou bien 12 peut être placé dans la position 21. Si le premier cas se présente pour tout déplacement de l'indicatrice dans la variété, celle-ci est appelée *bilatère*; sinon, *unilatère*. Une variété bilatère peut être orientée de deux manières; les deux variétés sont dites *opposées*.

J'avais déjà utilisé ces définitions quand je vis la méthode de Poincaré (*Analysis situs*, § 4 et 8); j'ai continué cependant à me servir de mes propres définitions, puisque celles de Poincaré visent surtout les recherches topologiques sous forme analytique.

J'ai remarqué que la définition qui se trouve dans le Livre de MM. Picard et Simart (p. 23) concorde essentiellement avec la mienne ; mais j'ai préféré suivre ici ma forme primitive qui offre à l'intuition un appui plus solide.

Considérons la frontière d'une variété $\mathbf{M}$ à n dimensions, bilatérale et orientée, et supposons qu'elle soit orientée à l'aide de l'indicatrice de la variété elle-même. Ceci se fait en déplaçant par déformation continue l'indicatrice de la variété, de façon que sa frontière, une indicatrice d'ordre $n - 1$, se trouve placée sur la frontière de $\mathbf{M}$, et alors l'indicatrice d'ordre $n - 1$ (avec toutes celles d'ordre inférieur qu'elle contient) peut être employée pour orienter la frontière. Inversement, on peut d'une manière semblable orienter la variété elle-même à l'aide de l'indicatrice de la frontière. Dans la suite, nous exigerons toujours que la frontière soit orientée conformément à l'indicatrice de la variété.

(La définition usuelle du côté positif et négatif d'une surface, sur la base de sa direction positive de rotation, suppose qu'on ait choisi l'indicatrice de l'espace ou un équivalent de celle-ci, la main droite, une montre, ou un moyen analogue.)

✓ *Coins orientés.* — Envisageons une variété à m dimensions définie par l'ensemble des points

$$(\mathcal{Y}) \equiv (\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \dots, \mathcal{Y}_m),$$

où les $\mathcal{Y}$ sont des variables réelles qui ne sont assujetties à aucune condition dans leur variation. Le point $(0, 0, \dots, 0)$ est appelé (o) . De ce point, on trace vers chacun des m points $(a), (b), \dots, (k)$ les demi-droites A, B, ..., K [c'est-à-dire les segments allant de (o) aux autres points et sur chacun desquels on prend pour direction positive la direction de (o) à l'autre extrémité]. Il est supposé que les m points aient une disposition générale telle que le déterminant

$$\Delta = |a, b, c, \dots, k|$$

soit différent de zéro. Dans ce cas, si p désigne un nombre entier compris entre 1 et m , on peut être certain de ne jamais pouvoir faire passer une variété plane de $p - 1$ dimensions à travers p des lignes. A chaque demi-ligne correspond une variété plane à $m - 1$ dimensions passant par les autres demi-lignes. Les m variétés

planes, avec les demi-lignes, forment ce que nous appellerons un *coin* à m dimensions ayant (o) pour sommet et les demi-lignes pour arêtes; nous l'appelons *orienté* si l'ordre par lequel les arêtes sont nommées est déterminé. $m - 1$ des demi-lignes déterminent maintenant dans la variété plane où elles se trouvent un coin à $m - 1$ dimensions, et ainsi de suite; en général, p arêtes quelconques se trouvent dans une variété à p dimensions contenues dans le coin donné et orienté conformément à l'orientation de celui-ci.

Nous pouvons facilement établir une liaison entre l'ordre dans lequel les arêtes sont nommées, et la détermination de l'indicatrice dans la variété (γ). Comme frontière de l'indicatrice, choisissons par exemple la variété sphérique $\Sigma(\gamma^2) = r^2$. Celle-ci est coupée par l'arête A en un point a' ; on prend le voisinage de a' , dans la frontière de l'indicatrice d'ordre m , comme indicatrice d'ordre $m - 1$ et on l'imagine limitée par la variété définie par l'intersection de $\Sigma(\gamma^2) = r^2$ avec la variété plane à $(m - 1)$ dimensions contenant B, ..., K. Cette variété est traitée de la même manière: dans la frontière de l'indicatrice d'ordre $m - 1$, le voisinage du point b' où B coupe la variété sphérique est pris comme indicatrice d'ordre $m - 2$ et limité à l'aide de la variété plane contenant C, ..., K. En continuant ainsi suivant l'ordre des arêtes déterminé par l'orientation du coin, on finit par une courbe fermée [intersection de $\Sigma(\gamma^2) = r^2$ et de la surface qui contient les deux dernières arêtes I et K]. Le point d'intersection de I est appelé i' , celui de K est appelé 1; la prolongation négative de K coupe en un point appelé 2. Comme indicatrice d'ordre 1, nous prenons l'arc 1 i' 2; et, ainsi, l'indicatrice d'ordre n est déterminée. La relation entre celle-ci et le coin peut être brièvement indiquée ainsi: la première arête du coin rencontre la frontière de l'indicatrice en un point de l'indicatrice d'ordre $m - 1$; sa deuxième arête, en un point de l'indicatrice d'ordre $m - 2$, ...; sa $(m - 1)^{\text{ième}}$ arête en un point de l'indicatrice d'ordre 1; et, enfin, sa $m^{\text{ième}}$ arête au point 1 et au prolongement négatif de celle-ci au point 2.

Lorsque nous déplaçons le coin d'une façon continue, nous exigerons que p arêtes ne doivent jamais se trouver dans la même variété plane à $p - 1$ dimensions. Si le sommet du coin est

déplacé de (o) à (t), et si les arêtes du coin sont déterminées par les points (a'), (b'), . . . , (k'), le déterminant

$$\Delta = |a' - t, b' - t, \dots, k' - t|$$

aura le même signe que Δ pour la position de départ.

Le coin peut être déplacé de manière que les $m - 1$ premières arêtes coïncident avec les arêtes correspondantes d'un coin donné à m dimensions. Suivant que la $m^{\text{ième}}$ arête peut être amenée à coïncider avec la $m^{\text{ième}}$ ou non, on dit que les coins sont de même genre ou de genre opposé.

Supposons que l'indicatrice au point (γ) soit déterminée conformément au coin de coordonnées, c'est-à-dire au coin dont le sommet est en (o) et dont les arêtes passent par les points

$$\begin{aligned} & (1, 0, 0, \dots, 0), \\ & (0, 1, 0, \dots, 0), \\ & \dots\dots\dots, \\ & (0, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Ici, $\Delta = 1$; donc, pour tous les coins orientés conformément à l'indicatrice de (γ), Δ' sera positif, et *vice versa*.

Comparaison avec la théorie de Poincaré (*Analysis situs*, § 8). — Une variété élémentaire déterminée (*Analysis situs*, § 3) par

$$x_i = \theta_i(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

conjointement avec des inégalités de la forme

$$\psi(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) > 0$$

peut être considérée comme l'image d'une variété élémentaire en (γ) déterminée par les inégalités $\psi(\gamma) > 0$. Nous l'orienterons par une indicatrice qui est l'image de celle prise dans (γ).

Nous allons indiquer comment on peut voir que notre exposition concorde avec celle de Poincaré. Le problème se pose ainsi :

Nous nous sommes donné deux variétés élémentaires de $m^{\text{ième}}$ ordre, et déterminé par

$$\begin{aligned} (1) \quad & x_i = \theta_i(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m), \\ & |\gamma_k| < \beta_k, \end{aligned}$$

et v_2 déterminé par

$$(2) \quad \begin{aligned} x_i &= \theta_i(z_1, z_2, \dots, z_m) \\ z_k &< \gamma_k, \end{aligned}$$

et nous supposons que v_1 et v_2 ont une variété élémentaire v' en commun. Poincaré définit alors l'ordre des paramètres z par l'ordre des paramètres y — ou ce qui est essentiellement la même chose : l'ordre des y par l'ordre des z — en exigeant que le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_m)}$$

soit positif pour les points de v' .

Nous définissons l'ordre des z en exigeant que les indicatrices dans v' qui correspond aux coins de coordonnées dans (y) et (z) soient de même genre.

Nous démontrerons que ces deux définitions donnent le même résultat. Soient

$$(y^0) \equiv (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$$

et

$$(z^0) \equiv (z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0)$$

deux points de (y) et de (z) correspondant au même point de v' . Considérons le coin dans (z) dont le centre est en (z^0) et dont les arêtes passent par les points

$$\begin{aligned} &(z_1^0 + dr, z_2^0, \dots, z_m^0), \\ &(z_1^0, z_2^0 + dr, \dots, z_m^0), \\ &\dots\dots\dots, \\ &(z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0 + dr), \end{aligned}$$

où dr est une quantité positive infiniment petite. Le déterminant Δ' étant ici $(dr)^m$, ce coin est du même genre que le coin de coordonnées dans (z) ; l'indicatrice déterminée par lui est donc d'accord avec l'orientation de (z) . D'après *notre* définition, on peut déterminer l'indicatrice de (y) en représentant dans (y) , à l'aide des équations (1) et (2), la partie de (z) qui correspond à v' et en représentant en même temps l'indicatrice de (z) . Il s'agit maintenant de démontrer qu'un coin correspondant à l'indicatrice ainsi construite est du même genre que le coin des coordonnées lorsque celui-ci est orienté selon la définition de Poincaré. Or, ce

coin-là est défini par le fait d'avoir le sommet en (y^0) et les arêtes passant par les points

$$\begin{aligned} & \left[y_1^0 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial z_1} \right)_0 dr, y_2^0 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial z_1} \right)_0 dr, \dots, y_m^0 + \left(\frac{\partial y_m}{\partial z_1} \right)_0 dr \right], \\ & \left[y_1^0 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial z_2} \right)_0 dr, y_2^0 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial z_2} \right)_0 dr, \dots, y_m^0 + \left(\frac{\partial y_m}{\partial z_2} \right)_0 dr \right], \\ & \dots\dots\dots, \\ & \left[y_1^0 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial z_m} \right)_0 dr, y_2^0 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial z_m} \right)_0 dr, \dots, y_m^0 + \left(\frac{\partial y_m}{\partial z_m} \right)_0 dr \right], \end{aligned}$$

où les indices des quotients différentiels partiels indiquent qu'il faut prendre leurs valeurs au point (z_0) . Δ' a, pour ce coin, la valeur

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_m)}(dr)^m,$$

qui, en suivant la définition de Poincaré, est positive. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Un échange de deux arêtes du coin où un changement de la direction positive sur une arête changent le genre du coin.

XI. — SUITE DE L'EXAMEN DU DIAGRAMME D'UNE VARIÉTÉ À 3 DIMENSIONS.

Retournons au diagramme. Le problème à résoudre était celui de le réduire à une forme normale; je n'ai pas réussi à en trouver une, mais je ferai pourtant quelques remarques sur la résolution du problème.

Premièrement, quelle est la condition pour que la variété fermée à 3 dimensions définie par le diagramme soit bilatère? D'abord, toute courbe fermée qu'elle renferme peut être déformée en une courbe complètement contenue dans le diagramme, et son parcours dans celui-ci peut encore être réduit au système de fils. La condition nécessaire et suffisante sera donc que, en parcourant une ligne par un *quelconque* des fils, on revienne à la sphère centrale sans que l'indicatrice ait changé de genre. Les deux embouchures d'un fil sont des éléments de surface sur la sphère centrale. Sur le contour de l'une d'elles, nous fixons une

direction positive, par exemple, celle des aiguilles d'une montre (vue du dehors). En déplaçant la courbe fermée le long de la surface du fil, jusqu'à ce qu'elle coïncide avec le contour de l'autre embouchure, on fixe sur celui-ci une direction positive qui est ou bien celle des aiguilles de la montre, ou bien celle contraire. (On suppose toujours que la sphère centrale se trouve dans notre espace. Dans le premier des deux cas, les jonctions des bouts de fil avec la sphère centrale ne peuvent être réellement établies dans notre espace; mais elles peuvent l'être dans **T**.) *Dans le premier cas, la variété est évidemment unilatère; si le second cas est réalisé pour tous les fils, la variété est bilatère.*

On peut toujours se représenter le système de fils pour une variété bilatère comme situé dans notre espace: en coupant un fil, en le tordant, et ensuite en rejoignant les deux bouts convenablement, on peut obtenir que les bandes d'attachement courent le long de la surface du fil sans s'enrouler autour de celui-ci.

Le diagramme peut être transformé en formes équivalentes par déformations continues; mentionnons en particulier:

1. Les bandes d'attachement peuvent être déplacées arbitrairement sur la surface du système de fils, pourvu que les bandes ne se touchent jamais les unes avec les autres.

2. Chacune des embouchures de fils peut être déplacée le long de la surface formée par la sphère centrale et les $p - 1$ fils, pourvu que, en se mouvant, elle ne passe à travers aucune bande; les bandes qui passent par l'embouchure de fil en question doivent la suivre et se déplacer, d'ailleurs, conformément à 1.

3. Les bandes d'attachement peuvent, en dehors du déplacement mentionné, en 1, en subir un autre par-dessus un des côtés d'une plaque. L'effet d'un tel déplacement peut être réalisé par l'opération suivante: sur la bande que l'on veut déplacer, on introduit un coude que l'on allonge vers un point de la bande correspondant à la plaque; puis on coupe la première bande à l'extrémité du coude et l'on intercale une courbe qui suit la seconde bande dans toute sa longueur.

A l'aide de ces déplacements, on peut opérer un grand nombre

de simplifications sur le diagramme. Si, par exemple, une bande revient d'une embouchure de fil à la même sans avoir, entre temps, passé par d'autres fils, le coude ainsi formé par la bande peut être enlevé. Si, parmi les fils parcourus par une bande, il y en a un qui est parcouru une seule fois, on peut, par les déplacements 2, obtenir que cette bande parcoure une seule fois le fil en question sans en parcourir d'autres. De plus, on peut obtenir (par les déplacements 3) que toutes les autres bandes soient enlevées du fil. Ceci fait, le fil peut évidemment être déformé (avec la plaque qui correspond à la bande) de façon à rentrer dans la sphère centrale; il est désormais sans intérêt. Je crois que la condition mentionnée pour qu'un fragment de bande puisse être enlevé du diagramme est aussi une condition nécessaire, mais je n'ai pas réussi à le prouver d'une façon tout à fait incontestable.

On pourrait être tenté de croire que, par déformation continue, on réussirait à séparer les p bandes de manière que chacune parcoure à elle seule un des p fils. Mais on peut prouver que cela est impossible; et c'est pourquoi le problème de réduire le diagramme à une forme normale est probablement très difficile. Nous nous bornerons à considérer des cas où la séparation peut être opérée, mais, préalablement, nous mentionnerons brièvement *les différentes classes de courbes* qui peuvent être tracées sur un tore dans l'espace ordinaire sans le diviser en parties; nous compterons dans une classe toutes les courbes qui puissent, par déplacements continus, être transformées les unes dans les autres.

La première classe comprend *les courbes méridiennes* qui parcourent la surface du tore; elles peuvent servir de frontières à des fragments de surface simplement connexes situés entièrement dans l'espace intérieur à la surface; nulle autre parmi les courbes considérées n'a cette propriété. Une autre classe est formée par *les courbes de latitude* définies par le fait qu'elles peuvent constituer la frontière de fragments de surface simplement connexes situés dans l'espace extérieur à la surface du tore. En traçant une courbe méridienne λ et une courbe de latitude β (sur chacune desquelles un sens positif a été déterminé), on peut construire de nouvelles classes de coupures en rond: on circule, par exemple, n fois le long de β en direction positive; ensuite on ferme la courbe

par une ligne le long de λ , en direction ou positive ou négative; désignons une telle courbe par $[n\beta \pm \lambda]$. De façon parallèle, $[\beta \pm n\lambda]$ signifie une classe de courbes représentée par une courbe circulant une fois le long de β , mais qui, avant d'être fermée, effectue n circulations le long de λ . En coupant le tore par une coupure à travers une courbe méridienne, on peut le tordre de façon à donner n tours à l'une des extrémités dans une direction convenable; et en assemblant de nouveau les bouts de juste façon, on pourra réduire la courbe à une courbe de latitude (la courbe de latitude primitive cesse naturellement d'en être une). La classification complète est assez difficile, et il n'y a aucune raison de poursuivre en cet endroit notre étude de plus près.

Un fil sur le diagramme peut être transformé en un tore rattaché à la sphère centrale par un cylindre. Sur la surface de celui-ci court la bande d'attachement qui y appartient; elle suit une des courbes qui viennent d'être mentionnées. Car, selon nos données, chaque bande pouvait être amenée à parcourir chacune son propre fil. Si la bande est une *courbe de latitude*, le tore et la plaque peuvent, comme il a été déjà mentionné, être rentrés dans la sphère centrale et *ne jouent alors aucun rôle*. Le cas où toutes les bandes sont des *courbes méridiennes* est particulièrement simple, et la situation est tout à fait analogue à celle rencontrée dans notre examen des surfaces. Figurons-nous le diagramme placé dans notre espace et celui-ci placé dans **T**; on forme facilement un espace fermé qui a pour diagramme le diagramme donné. Si une plaque doit être attachée à une bande, nous la plaçons dans **T** *au-dessus* de notre espace P, de sorte que sa projection sur P coïncide avec un des éléments de surface limités par la bande et intérieurs au diagramme. Le bord de la surface est recourbé vers notre espace et attaché au diagramme le long de la bande. Maintenant, figurons-nous chaque tore transformé en un fil et rendons la plaque plus épaisse, de sorte que la bande d'attachement occupe toute la surface du fil. La variété ainsi construite peut être fermée en ajoutant une variété élémentaire dont la projection est la sphère centrale. Nous sommes ainsi arrivés à une forme qui correspond exactement à la forme normale de Klein pour les surfaces. Le contour sur P de la variété à 3 dimensions est formé précisément par une telle surface et la variété consiste en outre en deux parties

dont les projections sont toutes deux le solide de P limité par le contour; l'une des parties est située, par exemple, au-dessus de P , l'autre au-dessous. On peut dire que cette variété est construite en ajoutant un certain nombre d'anses à un espace sphérique. Une telle anse est formée en retirant deux variétés élémentaires de l'espace sphérique; la frontière de l'une d'entre elles étant déplacée hors de l'espace sphérique et ensuite ramenée de façon à coïncider avec la frontière de l'autre, de manière que, bien entendu, la variété devienne bilatère. Le voisinage d'une courbe fermée dans T est limité par un espace du genre que nous venons de décrire.

Toute surface fermée dans T est entourée d'une variété à 4 dimensions, limitée par une variété à 3 dimensions que nous appellerons l'*enveloppe* de la surface. (De pareille manière, on détermine l'enveloppe d'une variété fermée quelconque ou d'un point situé dans une variété donnée.) Déterminons maintenant le diagramme de l'enveloppe d'une surface de tore dans T . Elle se compose de 3 fils; chacune des trois bandes parcourt deux d'entre les fils deux fois en directions opposées. On peut s'en figurer l'aspect en plaçant le centre de la sphère centrale à l'origine des coordonnées d'un système rectangulaire dans notre espace, et en faisant suivre au fil les trois axes qu'on s'imagine prolongés à travers l'infini. Les lignes d'intersection des fils avec les trois surfaces de coordonnées indiquent alors le cours des bandes. Voilà un exemple de diagramme où les bandes ne peuvent être amenées à parcourir chacune son fil. Ce diagramme est du même genre que l'exemple mentionné par MM. Picard et Simart (Chap. II, n° 48). On obtient, d'ailleurs, de pareils diagrammes pour les enveloppes de surfaces fermées dans T . Cependant la variété des diagrammes n'est pas épuisée par ces exemples.

Nous avons considéré un diagramme formé d'un tore sur la surface duquel la ligne d'attachement décrivait une courbe méridienne; mais son parcours peut se faire d'une infinité de manières. Considérons seulement un exemple (auquel nous reviendrons plus tard) où la *ligne d'attachement est une courbe* $[2\beta + \lambda]$; en aplatissant le tore de sorte que la bande en détermine le bord, on obtient la surface unilatère bien connue de Möbius.

Comme il a été déjà dit, le noyau du diagramme indique les cou-

pures (lignes et éléments de surface) qu'il faut tracer pour rendre la variété simplement connexe. Pour déterminer ces coupures, nous pouvons d'ailleurs suivre un chemin un peu différent en nous rappelant que le diagramme est équivalent à la variété percée. Car pour rendre celle-ci simplement connexe, on peut d'abord percer un canal à travers chacune des p plaques; ensuite, on coupe les fils par des éléments de surface ayant chacun pour frontière une courbe méridienne, et, pour que celles-ci deviennent des coupures du diagramme, on doit à chaque point d'intersection d'une bande avec une courbe méridienne ajouter à la surface correspondant à celle-ci une sorte de langue allant dans la plaque jusqu'au canal qui perce la plaque.

Donc, en un pareil point d'intersection, le bord de la surface de coupure passe de la courbe méridienne jusqu'au canal le long d'un côté de la plaque; il entre le long du canal et revient à la courbe méridienne le long de l'autre côté de la plaque. Inversement, ce système de coupures peut être considéré comme un diagramme de la variété primitive si l'on se figure comme restantes les parties enlevées. Les canaux deviennent alors des fils sortant de la variété enlevée par le pointage primitif; les coupures de surfaces deviennent des plaques. Il y a une sorte de dualité entre les deux diagrammes: les fils de l'un correspondent aux plaques de l'autre et *vice versa*; si un certain nombre de bandes parcourent un fil, autant de fragments de bandes limitent la plaque qui y appartient; si un certain nombre de plaques définissent des bandes sur un certain fil, autant de fils auront des bandes d'une certaine plaque, etc. Cette dernière méthode pour construire le diagramme a été employée par Betti.

Si l'on ferme le diagramme en rattachant sa surface à celle d'une sphère, on obtient, comme nous l'avons dit, une variété équivalente à la variété donnée. Les parties peuvent d'ailleurs être séparées d'une façon un peu différente; au lieu de joindre les plaques au système de fils, on peut les joindre de leurs deux côtés à la surface de la sphère. On obtient ainsi un corps à p anses, tout à fait semblable au système de fils. La surface de ce corps se joint à la surface du système de fils; il suffit de connaître sur la surface du corps le système de coupures annulaires (ne morcelant pas la surface) correspondant aux courbes β sur la surface du système de fils, et le

système correspondant aux courbes λ . Par exemple, deux tores dont les frontières sont jointes, de sorte que les courbes méridiennes couvrent les courbes de latitude et *vice versa*, correspondront à un diagramme dont le fil a pour bande une courbe de latitude. La variété elle-même est équivalente à un espace sphérique. Ceci concorde avec le fait que l'espace à l'intérieur d'un tore peut être transformé en l'espace extérieur, de manière que les courbes de latitude sur la surface deviennent les courbes méridiennes et *vice versa*, le tout sous la condition que la région à l'infini soit considérée comme un point, de sorte que tout ce qui tombe hors d'une certaine surface sphérique puisse être imagé par inversion à l'intérieur de celle-ci. Autre exemple : deux espaces intérieurs à des tores dont les frontières sont jointes de façon que les courbes de latitude couvrent les courbes de latitude, et les courbes méridiennes, les courbes méridiennes ; nous avons alors la variété équivalente à l'enveloppe d'une courbe fermée dans **T**. Choisissons enfin deux tores, où les courbes de latitude et méridiennes de l'un correspondent aux courbes $[2\beta + \lambda]$ et β de l'autre ; ceci correspond au diagramme sus-mentionné avec la bande d'attachement $[2\beta + \lambda]$.

Mentionnons aussi une circonstance qui rend la théorie plus difficile dans le cas où le nombre des dimensions dépasse 2. Si sur le diagramme d'une surface fermée bilatérale on tranche une anse, la jonction après coup ne peut se faire essentiellement que d'une seule façon si la surface doit rester bilatère ; on revient donc, sans doute, en refaisant la jonction, à un diagramme équivalent au premier. Si, par contre, on a une variété à 3 dimensions, comme celle qui constitue la frontière du voisinage d'un tore dans **T**, cette variété pourra être tranchée par un tore (correspondant à une courbe méridienne sur la surface dont on examine l'enveloppe). *Cependant, la jonction peut se refaire de façons infiniment nombreuses et essentiellement différentes* : β et λ sur l'une des frontières peuvent être jointes à deux quelconques des coupures annulaires sus-mentionnées, pourvu seulement que celles-ci se coupent en un point.

VII. — COMPARAISON AVEC DES EXPOSITIONS ANTÉRIEURES.

En comparant les résultats ainsi obtenus avec les expositions antérieures, nous nous bornerons principalement aux Ouvrages suivants (que nous désignerons pour plus de commodité par des abréviations) :

1. RIEMANN, *Fragment aus der Analysis situs* (Fragm. XXIX) (*Gesammelte mathematische Werke*, 2^{me} édition, par H. Weber, 1892). — Désigné par R., *Fr.*

2. BETTI, *Sugli spazi di un numero qualunque di dimensioni* (*Annali di Matematica*, 2^{me} série, vol. IV, 1871). — B., *Spz.*

3. POINCARÉ, *Analysis situs* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2^{me} série, Cah. I, 1895). — POINC., *A. S.*

4. PICARD, *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Liouville*, 4^{me} série, vol. V, 1889). — PIC., *Mém.*

5. PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, vol. I, 1897; surtout Chap. 2. — P. et S.

Les Ouvrages de W. Dyck dans les *Math. Ann.*, vol. XXXII et XXXVII (*Beiträge zur Analysis situs*, 1888 et 1890) suivent une autre direction que celle de nos recherches ici; il n'y a donc pas de raison pour faire ici une comparaison.

Une critique du fragment de Riemann serait injuste, puisqu'il ne contient que des esquisses provisoires qui n'ont pas été destinées à la publication. D'ailleurs, à propos d'erreurs chez Riemann et Betti, on peut souvent se borner à mettre en parallèle les recherches en question et celles qui y correspondent modifiées chez MM. Picard et Poincaré; en de tels points, une critique détaillée serait donc superflue et, de plus, difficile, les définitions étant souvent très vagues chez eux.

Il faut d'abord examiner la question de la *définition des variétés*. Dans Riemann, aucune définition ne se trouve donnée. Betti a compris qu'il faut se placer sur une base analytique pour

pouvoir définir une variété à n dimensions (B., *Spz.*, 1^{re} Partie); la pensée est capable de généraliser la notion de fonction à un nombre quelconque de variables indépendantes, mais la faculté d'intuition n'est pas en état de généraliser également la notion de l'espace à 3 dimensions. Cependant, la définition est donnée d'une façon un peu trop vague pour que les recherches suivantes puissent devenir exactes. Pour voir quels développements et quelle précision il faut donner à la définition, on peut la comparer à la belle exposition donnée par Poincaré (Poic., *A. S.*, § 1, 2, 3, 4 et 8), laquelle constitue le véritable modèle de la méthode à employer dans les recherches de ce genre, travaillées jusqu'à la clarté et dont l'utilité pour la Science est prouvée.

Chez Riemann ainsi que chez Betti, la définition des *nombre de connexion* s'appuie sur une idée analogue à celle sur laquelle Riemann lui-même appuie sa définition des *nombre de connexion* d'une surface (R., *Fr.*: Es sarà $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$; et B., *Spz.*, 3^e Partie : Per giustificare...). On peut s'étonner que Poincaré expose la définition des nombres de connexion sans cette justification (*A. S.*, § 5 et 6), mais chez MM. Picard et Simart, la question se trouve traitée au Chapitre 2, n^{os} 12 et 13. Au n^o 12, on trouve le « lemme » de Riemann sous une forme précisée (chez Poincaré, cela se trouve principalement sous la forme de l'assertion que les homologies peuvent être additionnées comme des équations). Si l'exposition du n^o 13 diffère de celle de Riemann-Betti, c'est qu'il y a une lacune dans le raisonnement de celle-ci. Car pour pouvoir vraiment, de la manière décrite (B., *Spz.*, 3^e Partie : Le t spazi chiusi...), remplacer successivement les A par les B, il faut être sûr que les A et les B peuvent être accouplés par deux, de sorte que les couples constituent chacun une partie de la frontière (ou toute la frontière) de la variété de $(m+1)^{\text{ième}}$ dimension. La possibilité de ceci peut être prouvée par les homologies de Poincaré; cependant il n'y a pas lieu d'exposer cela plus longuement, puisque l'idée fondamentale d'une telle démonstration coïncide essentiellement avec l'exposition chez P. et S., Chap. II, n^o 13.

Il faut remarquer, au demeurant, que la définition n'est justifiée que quand on aura, en outre, prouvé qu'un système de variétés comme celui qui est mentionné dans la définition *existe vérita-*

blement. Ici les expositions modernes (P. et S., Chap. II, n° 11 et POINC., *A. S.*, § 5 et 6) ne semblent pas suffisamment claires. La définition du nombre de connexion p dépend et de la manière dont on définit les variétés $V_1, V_2, \dots$ y mentionnées, et de l'importance accordée aux mots : « former frontière ». $V_1, V_2, \dots$ doivent être, entre autres, *bilatères* ; de plus, elles doivent être ce que nous appelons *orientées*, et il est exigé que ces orientations *concordent* (comme nous disons) avec l'orientation de la variété limitée par elles (P. et S., Chap. II, n° 8). Si l'on maintient ces exigences à la lettre, on rencontrera des difficultés. Sur la surface d'un tore, une courbe méridienne λ et une courbe de latitude β (toutes deux munies d'un sens positif) *ne forment pas* frontière, comme on le suppose généralement, avec toute courbe fermée de la surface ne formant pas frontière à elle seule, même pas s'il est permis de compter β, k_1 fois et λ, k_2 fois. Elles ne peuvent par exemple former avec $[\beta + \lambda]$ la frontière d'aucun fragment de surface si l'on persiste à exiger la dépendance entre l'indicatrice du fragment de surface et celle de la frontière. En général, on ne voit pas tout à fait clairement ce que signifie l'expression : les courbes sur une surface forment frontière lorsque celles-ci se coupent. Une petite courbe fermée et plane, de la forme du chiffre 8, forme-t-elle frontière avec aucune partie de la surface ? La réponse : oui, ne pourra en tout cas être obtenue que par des adjonctions artificielles. Si nous dessinons un cercle autour de la courbe, on pourra fixer sur celle-ci deux directions positives différentes. Laquelle d'entre celles-ci formera frontière avec la courbe donnée ? Nous rencontrons exactement les mêmes difficultés avec les homologies de Poincaré (POINC., *A. S.*, § 5). Nous croyons pouvoir les écarter par la définition suivante (1) :

(1) Je n'ai pas pu suivre les objections de M. Heegaard, peut-être à cause d'une conception différente du mot « forme frontière ». Quant à l'exemple des courbes sur le tore, il est vrai que $\beta + \lambda$ ne forme pas frontière avec β et λ et, par conséquent, que nous n'avons pas l'homologie

$$\beta + \lambda + [\beta + \lambda] \sim 0.$$

Mais $\beta + \lambda$ forme frontière avec $-\beta$ et $-\lambda$; donc, nous avons

$$[\beta + \lambda] - \beta - \lambda \sim 0$$

Un système de variétés à m dimensions $V_1, V_2, \dots$ est considéré comme homologue à un autre système de variétés à m dimensions $W_1, W_2, \dots$, toutes situées dans une variété S_n :

$$V_1 + V_2 + \dots \sim W_1 + W_2 + \dots$$

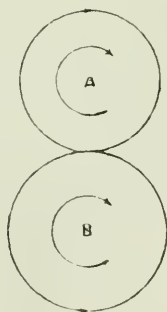
si, par déformation continue dans S_n du premier système, on peut réduire celui-ci soit tout simplement au dernier système (avec les indicatrices correctes), soit à un système qui peut être dérivé de l'autre par les deux espèces de modifications suivantes : ou bien on trace dans la variété à m dimensions quelques coupures fermées à $m-1$ dimensions, on écarte les frontières ainsi créées en les rattachant (bilatéralement) à des variétés à m dimensions qui peuvent être divisées en deux groupes; les parties de l'un des groupes se trouvent toujours infiniment près de celles de l'autre et sont orientées de la façon opposée; ou bien on enlève le voisinage de quelques variétés dont le nombre de dimensions est inférieur à $m-1$, et l'on écarte les frontières ainsi créées en les rattachant à des variétés qui sont infiniment près de coïncider avec des variétés d'un nombre de dimensions inférieur à m . Si $V_1, V_2, \dots$ sont homologues à l'enveloppe d'un point, on les dit

ou

$$[\beta + \lambda] \sim \beta + \lambda,$$

ce qui est bien ce qu'il faut.

La petite courbe en forme du chiffre 8 est bien homologue à 0 puisqu'elle est



la frontière de la région $A - B$ (voir la figure) où les sens de A et B sont déterminés comme dans la figure. (Note du Traducteur.)

homologues à 0 : $V_1 + V_2 + \dots \sim 0$. (Les variétés ajoutées n'auront pas d'importance pour les intégrales leur appartenant.)

Donnons avec des explications plus détaillées quelques exemples : Une surface sphérique enfermant deux surfaces sphériques (toutes orientées de telle manière que leurs indicatrices aient le même genre) peut être réduite à celles-ci réunies par un tuyau infiniment mince. Ces dernières peuvent de leur côté être réduites à la première lorsque, après l'avoir coupée le long d'un grand cercle, on a rattaché les bords à deux plaques circulaires.

Il en est de même pour une surface sphérique enfermant la surface d'un tore convenablement orientée.

Les courbes $[\beta + \lambda]$ sur la surface d'un tore peuvent être réduites aux courbes $[\beta]$ et $[\lambda]$ lorsqu'on a tranché celles-ci en leur point de rencontre et rejoint les bouts par deux petits arcs, l'un à côté de l'autre.

Dans B., *Spz.*, 4^e et 5^e Partie, on trouve des recherches qui ne se retrouvent pas chez les auteurs postérieurs, aussi ne faut-il pas, comme nous allons le voir, trop s'y fier. Cependant, le théorème plusieurs fois proposé $p_m = p_{n-m}$ (voir ci-dessous) est probablement inspiré par ces recherches (Cf. B., *Spz.*, 5^e Partie : « Ora ciascuno degli spazi A sarà intersecato da una e da una soltanto delle sezioni trasverse di $n - m$ dimensioni che fanno parte di quelle che rendo R semplicemente connesso ».) Dans la 4^e Partie se trouve la définition de coupes transversales (sezione trasversa) en variétés à frontière; on exige que la frontière de la coupe transversale tombe entièrement sur celle de la variété. Ensuite on expose comment une variété (si elle est fermée, il faut d'abord la percer) peut par définition continue perdre une dimension, c'est-à-dire que Betti expose ce que nous avons appelé le *diagramme* tout en le considérant seulement comme équivalent à la variété donnée (percée); mais sans remarquer que le diagramme fournit des coupures rendant la variété simplement connexe. Il avance le théorème suivant : « Aucun des nombres de connexion d'une variété fermée n'est modifié par un percement, sauf celui d'ordre le plus élevé, qui est augmenté de s par $s + 1$ percements. »

Dans la 5^e Partie, le théorème suivant est avancé. « Pour rendre simplement connexe au moyen de coupes transversales un

espace R à n dimensions et ayant une frontière, il est nécessaire et suffisant de tracer p_{n-1} coupes transversales à 1 dimension, p_{n-2} à 2, p_{n-3} à 3, ..., et p_1 à $n-1$ dimensions, où $p_1+1, p_2+1, \dots, p_{n-1}+1$ sont les nombres de connexion respectivement d'ordres 1, 2, 3, ..., $n-1$. »

Il faut se rappeler ici la définition d'une coupe transversale : sa frontière doit être située entièrement dans la frontière *primitive* de la variété, c'est-à-dire ne doit pas tomber sur la frontière nouvelle produite par les coupes transversales déjà tracées; ceci n'est évidemment pas d'un formalisme sans intérêt, car si l'on ne maintient pas cette exigence, il serait absurde de parler d'une condition nécessaire puisque, dans le cas contraire, on peut tracer un nombre infini de coupes la rendant simplement connexe. Si, par exemple, on trace dans la région intérieure à une sphère un canal allant d'un point de la frontière à un autre, l'espace peut être de nouveau rendu simplement connexe par une coupe dont la frontière suit en partie la frontière du canal; et cette opération peut être renouvelée aussi souvent que l'on voudra.

Bornons-nous pour le moment aux variétés à 3 dimensions, et considérons, par exemple, celle que nous avons désignée comme un espace sphérique à p anses. Ici $p_1 = p_2 = p$. Le diagramme se compose de fils, chacun parcourant son anse et sortant d'une sphère centrale dans l'espace sphérique; les plaques sont attachées aux fils par des coupes méridiennes, et chacune tranche son anse. Les plaques sont facilement déformées si bien que les bandes se glissent jusqu'à la sphère centrale, et l'on a réellement rendu simplement connexe la variété au moyen de p_2 coupes transversales à 1 dimension et p_1 coupes transversales à 2 dimensions. Prenons ensuite la variété percée ayant comme diagramme un fil sur lequel la bande d'attachement de la plaque parcourt la courbe $[2\beta + \lambda]$; elle peut évidemment être rendue simplement connexe par une certaine coupure linéaire, partant du point percé et y retournant, et par une coupure superficielle dont la frontière parcourt la surface de la ligne de coupure le long d'une ligne $[2\beta + \lambda]$; mais cette coupure superficielle ne peut pas être transformée en une coupe transversale puisque la bande d'attachement ne peut pas être ramenée à la surface de percement seulement. Dans ce cas, comme nous le dirons plus tard, $p_1 = 1$ et $p_2 = 0$ (avec les dési-

gnations de Betti; avec les dernières désignations de M. Picard ($p_1 = 2$, $p_2 = 1$). Ainsi, le théorème ne s'applique pas ici.

Il n'est pas difficile de trouver des fautes dans le raisonnement de Betti. D'abord, il n'est pas prouvé qu'on puisse réduire toute la variété donnée au système A (*voir* les notations de Betti) réuni à des variétés à $n - 2$ dimensions: cela peut se faire dans le premier de nos exemples, mais non pas dans le second. Il ne va pas de soi non plus que les nombres de connexion d'ordres $n - 2$, $n - 3$, ... ne se modifient pas si, de la façon indiquée, on trace une coupure linéaire aboutissant à la frontière primitive; sans doute, ils ne peuvent pas devenir plus petits, mais la coupure linéaire pourrait peut-être les rendre plus grands en empêchant, par exemple, une ligne, formant auparavant frontière, de le faire maintenant. Enfin, il a échappé à son attention qu'il se peut qu'une partie des frontières des coupes suivantes à dimensions plus élevées viennent à parcourir des coupes antérieurement tracées, de sorte que ces coupes-là ne deviennent pas des coupes transversales (au sens de Betti).

Considérons maintenant le théorème souvent mentionné $p_m = p_{n-m}$. Il a été plusieurs fois avancé et employé, mais le premier essai publié pour le prouver se trouve, je crois, chez Poincaré (*I. S.*, p. 33-46). MM. Picard et Simart ont senti avec raison que « peut-être plusieurs points auraient-ils besoin d'être complétés » et se bornent à considérer le cas $m = 1$. Mais ils ne nous semblent même pas avoir réussi à prouver le théorème dans ce cas spécial, et, chose remarquable, la supposition erronée dans le raisonnement paraît être la même que chez Poincaré.

Poincaré définit d'abord un chiffre $N(V, V')$ pour chaque point d'intersection entre deux variétés orientées V à p dimensions et V' à $k - p$ dimensions, lesquelles se trouvent toutes deux dans une variété U à h dimensions. Ces variétés, comme celles qui vont suivre, sont supposées fermées et bilatères. En supposant tout d'abord que V soit à 1 dimension et $V_1, V_2, \dots, V_k$ à $h - 1$ dimensions, on prouve que :

1° Si $\Sigma V_i \sim 0$,

$$\Sigma N(V, V_i) = 0:$$

2° Si l'homologie

$$\sum V_i \sim 0$$

n'a pas lieu, on peut toujours trouver une variété V pour laquelle

$$\sum N(V, V_i) \leq 0.$$

Ensuite, on essaie de prouver la même chose si V est à p dimensions et $V_1, V_2, \dots, V_k$ à $h - p$ dimensions (1. S., p. 43). On commence par avancer, comme évident, le théorème suivant : « Quant à $V_1, V_2, \dots, V_k$, nous les définissons de la manière suivante. Nous pourrons toujours trouver $p - 1$ équations

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_{p-1} = 0,$$

auxquelles satisfont tous les points de $V_1, V_2, \dots, V_k$; pour définir V_i , nous y adjoindrons une $p^{\text{ième}}$ égalité

$$F_i^q = 0. »$$

Chacune des variétés $V_1, V_2, \dots, V_k$ pourrait donc être l'intersection complète entre p variétés à $k - 1$ dimensions dans U . Pour $h = n, p = -1$, cette hypothèse coïncide avec celle-ci de MM. Picard et Simart (Chap. II, n° 24) : « Nous admettons que, dans une variété E_n , on puisse toujours, en outre de la continuité et de la connexion linéaire, considérer une variété V_1 comme l'intersection commune unique de $n + 1$ variétés V_{n-1} contenues dans E_n . »

Cependant, le commencement du raisonnement peut être fait sans employer l'hypothèse tout entière.

1. Si $\sum V_i \sim 0$, cela signifie que dans U peut être tracée une variété U' à $h - p + 1$ dimensions sur laquelle $V_1, V_2, \dots, V_k$ forment frontière. V coupe U' le long d'une courbe fermée V' (ou suivant un système de telles courbes). On a

$$N(V', V_i) = N(V, V_i)$$

et

$$\sum N(V', V_i) = 0;$$

donc

$$N(V, V_i) = 0.$$

2. Si, au contraire, l'homologie

$$\Sigma V_i \sim 0$$

n'a pas lieu, il n'est d'abord pas prouvé qu'une variété U' à $h - p + 1$ dimensions déterminée par $\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_{p-1} = 0$ puisse être tracée par $V_1, V_2, \dots, V_k$; si, cependant, nous considérons ceci comme exact (car il en est probablement ainsi), nous savons sans doute qu'une courbe fermée V peut être tracée dans U' de sorte que

$$\Sigma N(V', V_i) \geq 0,$$

mais il n'est pas certain que cette courbe puisse être découpée dans aucune variété V . Ici il faudrait donc se servir du théorème mentionné. Si, par exemple, $p = 2$, U' serait de dimension $h - 1$ et pourrait peut-être diviser U en deux parties U_1 et U_2 dont les frontières sont par conséquent U' . Dans celle-ci se trouve V' , et V serait alors divisé en deux parties, chacune dans une partie de U et ayant V' pour frontière. Mais rien ne s'oppose à ce que V' soit précisément une de ces courbes de la frontière qui ne forment frontière avec aucun fragment de surface ni dans U_1 ni dans U_2 .

Le raisonnement pour le théorème $P_p = P_{p-1}$ (p. 44) n'est donc même pas exact pour $h = 1$. Dans ce cas, l'inégalité

$$\mu \leq \lambda$$

est prouvée, sans doute (cf. le théorème analogue $p_1 \geq p_{n-1}$ chez P. et S., Chap. II, n° 26); mais le théorème

$$\mu = \lambda$$

n'est par conséquent pas prouvé. Considérons maintenant le raisonnement chez MM. Picard et Simart (Chap. II, n°s 24-27). Nous rencontrons ici, comme nous l'avons dit, la même hypothèse singulière. Le raisonnement du n° 26, où il est prouvé que $p_1 \geq p_{n-1}$, est, comme nous l'avons mentionné, sans doute exact; mais lorsqu'on essaie au n° 27 de prouver le théorème complémentaire, on s'appuie sur l'hypothèse mentionnée. Mais non seulement le théorème n'est pas prouvé : *il ne peut pas être exact*. Nous avons déjà, à plusieurs reprises, considéré une variété à 3 dimensions,

fermée et bilatérale, pour laquelle $p_1 = 2$ et $p_2 = 1$; attendons cependant un moment plus favorable pour l'examiner ⁽¹⁾.

XIII. — LES ESPACES DE RIEMANN.

Dans la suite, nous considérerons l'infini de notre espace comme un point. Un espace sphérique Σ peut alors être transformé en notre espace P par le procédé suivant : la partie de Σ située *au-dessous* de P est projetée sur celui-ci et transformée par inversion relativement à la sphère de contour; ensuite, la partie restante de Σ , qui se trouve *au-dessus* de notre espace, est projetée sur celui-ci.

Examinons les variétés à 3 dimensions qui naissent lorsqu'on représente sur Σ les valeurs d'une fonction continue des points de celle-ci prenant n valeurs à chaque point. Une telle variété est analogue aux surfaces de Riemann, et c'est pourquoi nous l'appellerons un *espace de Riemann*, P_n . Les n valeurs de la fonction sont supposées différentes, sauf sur certaines courbes fermées (*les lignes de ramification*), sur lesquelles nous supposerons que deux valeurs deviennent les mêmes. Si Σ est transformé en P , celles-ci représentent des courbes fermées que nous restreindrons à rester dans l'espace fini. D'ailleurs nous admettons que P_n forme un ensemble connexe.

Construisons maintenant sur P un espace à n couches, sur lequel les valeurs de la fonction peuvent être représentées uniformément. Traçons une surface conique avec le sommet en un point arbitraire O et avec la ligne de ramification F pour directrice; des génératrices du cône, nous n'emploierons que la partie située entre O et la ligne de ramification. La surface conique aura des génératrices doubles si la ligne de ramification, vue de O , a des points doubles apparents; elles s'étendent de O à la branche de courbe la plus proche. Imaginons qu'il y ait, sur P , n espaces séparés par la surface conique indiquée (*la coupure de ramification*) et que ceux-ci soient numérotés et appelés : 1^{re} couche, 2^e couche, ..., $n^{\text{ième}}$ couche. Sur les n points correspondants

(1) Voir la note, page 234.

(Note du Traducteur.)

à un point arbitraire de P sont placées les n valeurs $z_1, z_2, \dots, z_n$ de la fonction; en partant de ces valeurs, nous pouvons maintenant faire correspondre d'une façon univoque et continue les valeurs de la fonction aux points des n couches. Ces dernières sont alors rejointes selon les valeurs que z prend des deux côtés de la coupure. La variété fermée ainsi construite est appelée P_n . (La fonction potentielle d'un courant électrique offre quelques ressemblances avec les fonctions mentionnées; seulement, là, n est infiniment grand. La coupure de ramification peut être formée par la couche magnétique qui peut remplacer le courant électrique.)

Si, lorsqu'on décrit une courbe fermée autour de l'une des courbes de ramification, chaque valeur de z revient à sa valeur primitive; alors cette courbe peut être laissée entièrement hors de considération (*cf.* Points doubles sur les courbes algébriques). Toutes les autres courbes de ramification sont supposées simples, c'est-à-dire que deux, et deux seulement, des valeurs de z se permutent autour de chacune d'elles.

Quelquefois, on joint deux faces de coupure appartenant à la même couche: c'est le cas de toutes les faces à proximité d'un point de la courbe de ramification, sauf celles qui appartiennent aux couches qui se permutent lorsqu'on fait le tour de la courbe de ramification près du point considéré. Supposons qu'au point déterminé, les coupures de la $r^{\text{ième}}$ et la $s^{\text{ième}}$ couche se joignent alternativement; si de ce point on pénètre sur la surface de la coupe de ramification, ce sera toujours, forcément, les mêmes deux couches qui se relient alternativement jusqu'à ce qu'on rencontre l'un des générateurs doubles mentionnés. On peut alors délimiter une partie de la surface conique pour les points de laquelle la $r^{\text{ième}}$ et la $s^{\text{ième}}$ couche, et celles-ci seulement, sont reliées alternativement. Cette partie de la surface conique est limitée par *un arc ab de la courbe de ramification et par deux génératrices doubles Oa et Ob* , et dans cette partie pénètrent peut-être sous forme de rayons une ou plusieurs génératrices doubles qui n'atteignent pas tout à fait ab . Il existe autant de parties de cette espèce que la surface conique possède de génératrices doubles (h).

Aux point a et b , la courbe de ramification est arrêtée par des

surfaces venant l'une d'une branche A de la courbe de ramification, l'autre d'une branche B; nous disons que l'arc ab est arrêté par les branches A et B. Chaque arc ab est marqué avec les numéros des deux couches r et s qui sont reliées l'une avec l'autre par la partie de la surface conique limitée par l'arc ab ; r et s sont appelées les *caractéristiques* de l'arc.

Pour illustrer d'une façon schématique ce qui se passe le long d'une ligne double, nous traçons sur le papier deux lignes perpendiculaires qui représenteront deux branches de F; l'une est supposée au-dessus de l'autre et O est supposé situé derrière le point d'intersection apparent des lignes. La coupure de ramification s'étend jusqu'au-dessous du papier, de sorte que la coupure pour la ligne inférieure perce celle de la ligne supérieure; celle-ci arrête donc les deux branches de l'autre. Soient r et s les caractéristiques de la ligne supérieure. Trois cas peuvent alors se présenter :

Premier type. — L'une des branches de la ligne inférieure a les mêmes caractéristiques, r et s .

Deuxième type. — Une de ses caractéristiques est r , mais l'autre est t différente de s .

Troisième type. — Les deux caractéristiques t et u sont différentes de r et s .

Déterminons les caractéristiques pour l'autre branche de la ligne inférieure. Une circulation autour de cette branche peut être modifiée de façon qu'on perce d'abord la coupure de ramification de la ligne supérieure, ensuite celle de la première branche et, enfin de nouveau, celle de la ligne supérieure en direction opposée. En partant de la $r^{\text{ième}}$ couche, on pénétrera, si le point est du premier type, successivement dans la $s^{\text{ième}}$ et la $r^{\text{ième}}$, finissant dans la $s^{\text{ième}}$. De cette façon les caractéristiques sont déterminées comme le montrent les tableaux suivants.

Premier type.

	On commence dans	parcourt	finis dans	Carac- téristique.
$ \begin{array}{c} rs \\ \\ rs \text{ --- } \text{ --- } rs \\ \\ rs \end{array} $	r	s, r	s	$ \left. \begin{array}{c} s \\ r \\ t \\ u \end{array} \right\} rs $
	s	r, s	r	
	t	t, t	t	
	u	u, u	u	

Deuxième type.

$ \begin{array}{c} rs \\ \\ rt \text{ --- } \text{ --- } st \\ \\ rs \end{array} $	r	s, s	r	$ \left. \begin{array}{c} s \\ t \\ s \\ u \end{array} \right\} st $
	s	r, t	t	
	t	t, r	s	
	u	u, u	u	

Troisième type.

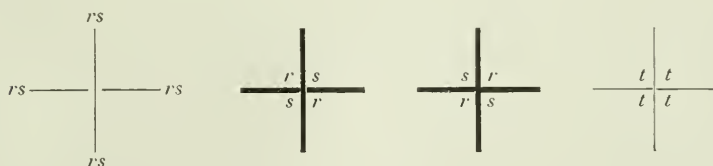
$ \begin{array}{c} rs \\ \\ tu \text{ --- } \text{ --- } tu \\ \\ rs \end{array} $	r	s, s	r	$ \left. \begin{array}{c} s \\ s \\ u \\ t \end{array} \right\} tu $
	s	r, r	s	
	t	t, u	u	
	u	u, t	t	

Traçons une petite surface sphérique z autour de O ; elle rencontre la coupure de ramification suivant une courbe C qui devient ainsi la projection centrale de F sur z et qui divise z en ω régions; elle a h points doubles. (Puisque le nombre d'arcs de ab est $2h$, nous avons par le théorème d'Euler $\omega = h + 2$, dans le cas où la ligne de ramification ne contient qu'une courbe.) Le système de surfaces de P_n découpé par z doit se composer de n surfaces sphériques simples séparées les unes des autres. Sur n surfaces sphériques de même rayon que z , nous tracerons des lignes correspondant au système C ; dans n des régions correspondantes, une sur sphère, nous écrivons les nombres $1, 2, \dots, n$ et nous donnons à chacune des sphères elles-mêmes des désignations conformes $z_1, z_2, \dots, z_n$; nous appelons les n systèmes de lignes $C_1, C_2, \dots, C_n$.

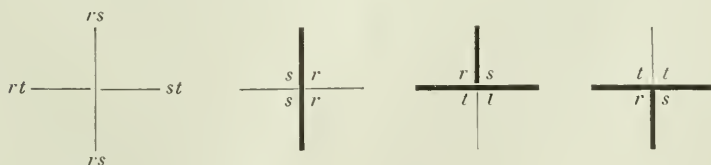
Les caractéristiques sur F sont projetées sur les arcs correspon-

dants de C . Supposons maintenant que les n sphères dans P_n entourant le point O soient enlevées et représentées chacune sur l'une des sphères $z_1, z_2, \dots, z_n$. Le numérotage peut être effectué de façon que z_i soit la sphère pour laquelle la région marquée i corresponde à des points de P_n de la $i^{\text{ème}}$ couche. A l'aide des caractéristiques, il est maintenant facile d'introduire dans toutes les régions sur les sphères des chiffres indiquant à quelle couche la région en question appartient. Les arcs de $C_1, C_2, \dots, C_n$ séparant des champs différemment marqués sont tracés en gros; les chiffres qui se trouvent dans les régions séparées par elles sont alors les caractéristiques. Si l'on place les n sphères de façon qu'elles se couvrent, les lignes tracées en gros composeront la ligne C comptée deux fois.

Examinons sur chaque surface sphérique la frontière des quatre régions se rencontrant au point qui correspond à un point déterminé des points doubles de C . Des tableaux ci-dessus, nous tirons la conclusion que, si le point est du *premier type*, alors, sur deux des sphères, on sera alternativement dans la $r^{\text{ième}}$ et dans la $s^{\text{ième}}$ couche, tandis que sur les autres sphères on reste dans la même couche :

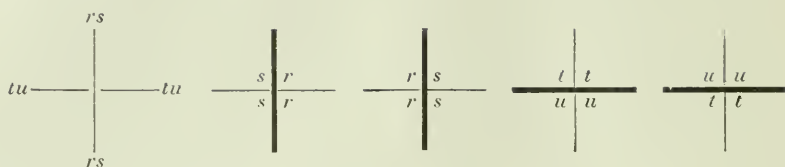


Si le point est du *deuxième type*, on reste sur $n-3$ sphères dans la même couche; les autres ont l'aspect suivant :



Si, enfin, le point est du *troisième type*, on restera sur $n-4$ sphères dans la même couche, tandis que les autres auront l'aspect

suivant :



Dans tous les cas, dans la série de points doubles correspondant à un point double déterminé sur z , il y aura *deux points et deux seulement pour lesquels la branche qui traverse le point et qui correspond à la branche inférieure sur F est marquée en gros.* Par un des autres $n-2$ points doubles ne passe aucune branche marquée en gros, ou bien il en passe une seule correspondant à la partie supérieure de la ligne de ramification.

Essayons, après ces préliminaires, de former le diagramme de P_n . Pour commencer, nous perçons *toutes* les n couches, par exemple aux points à l'infini. P_n est maintenant limité par n surfaces sphériques de rayons très grands. Nous ferons varier ces surfaces de façon qu'elles correspondent toujours à la même surface de P ; celle-ci peut être supposée déformée en une surface construite de la manière suivante : dans les régions de z on trace des courbes fermées qui suivent de près les branches de C et qui passent d'une branche à l'autre aux points doubles. z est ainsi divisé en ω éléments simplement connexes et en un système de bandes enfermant C . Ensuite, nous enfermons la coupure de ramification dans une surface partant des courbes fermées et la serrant comme un capuchon, une surface qui se recourbe le long du bord de la coupe de ramification et qui revient sur elle-même. On construit alors la surface mentionnée en fermant le capuchon par les ω éléments de surface de z . Le cours de la surface à travers une ligne double peut être clairement réalisé si l'on dresse, par exemple, sur une table, un livre in-quarto, le dos en haut, en dressant des deux côtés deux autres livres in-octavo et pareils entre eux. Ceux-là doivent également avoir les dos en haut et doivent former un angle droit avec le premier de façon que l'un semble être la continuation de l'autre. La surface de la table correspond alors à une partie de z .

Après les n percements, P_n peut être réduit à une variété com-

posée des n couches correspondant à la partie de P limitée par la surface mentionnée. De cette variété nous avons déjà retiré n sphères que nous avons placées dans les positions $z_1, z_2, \dots, z_n$; il s'agit maintenant de réduire la partie qui reste à une forme simple et de la rattacher à ces sphères.

Autour de chaque ligne double, nous déterminons dans P un solide en forme de prisme; c'est dans l'exemple cité le solide découpé du livre in-quarto si l'on s'imagine les livres in-octavo continués à travers celui-ci. Si la courbe C a en tout h points doubles, l'espace A limité par la surface du capuchon et par le système de bandes de h renfermera h prismes pareils. Le reste de A se compose de h solides en forme de plaques. Ceux-ci doivent être attachés aux branches et de haut en bas le long de deux côtés de certains prismes; enfin, ils sont limités par deux prismes, tandis que le reste du bord court librement le long d'une partie de F .

La portion de P_n qui correspond à l'un des prismes se compose de $n - 2$ prismes coïncidents séparés les uns des autres et d'un prisme double (à double couche) traversé par une ligne de ramification; ce dernier se transforme facilement en un prisme simple (à une seule couche). Ces prismes doivent maintenant être rattachés aux sphères; pour trouver commodément les points auxquels ils doivent être attachés, nous adjoindrons de chaque côté de C , à côté des caractéristiques primitives, deux caractéristiques nouvelles indiquant les courbes des deux sphères sur lesquelles l'arc est tracé en gros; nous appellerons celle-ci *les caractéristiques dérivées*. Pour les déterminer sur une branche donnée, on passe par un chemin quelconque d'un point de la branche jusqu'à un point de la région au moyen de laquelle les sphères ont été numérotées. On commence le parcours en emportant les caractéristiques de la branche, et chaque fois que l'on passe par une branche où une caractéristique concorde avec l'un des deux chiffres qu'en ce moment on porte avec soi, celui-ci est échangé avec l'autre caractéristique de la branche. Les caractéristiques dérivées doivent alors être les deux chiffres avec lesquels on entre dans la région fondamentale. Conformément aux idées que nous venons de développer, les caractéristiques dérivées doivent être égales sur les deux branches passant par un point double qui correspondent à la

branche inférieure de F . Prenons maintenant les $(n - 2) + 1$ prismes qui correspondent à une ligne double déterminée; ils doivent être joints aux sphères $z_1, z_2, \dots, z_n$ aux n points doubles correspondant à la ligne double. Chaque bout du prisme simple provenant d'un prisme double doit être joint à une sphère, c'est-à-dire doit réunir les deux sphères dont les numéros sont indiqués par les caractéristiques dérivées correspondant à la branche inférieure de F . Les autres $n - 2$ prismes sont rejoints, chacun par un de ses bouts, au point double de l'une des sphères restantes, et ainsi de suite.

Il ne nous manque maintenant que les portions de P_n correspondant aux h plaques dans P . A chacune de celles-ci correspondent dans P_n , $n - 2$ plaques simples séparées les unes des autres et une plaque double avec une branche ab de F pour ligne de ramification. Celle-ci peut être transformée en une plaque simple (à une couche). Le premier groupe de plaques doit être attaché aux sphères le long des bandes correspondant aux arcs qui ne sont pas tracés en gros, et pour ce qui reste, aux prismes. Puisqu'elles ont toutes un bord libre, elles peuvent être entièrement retirées et ne jouent plus aucun rôle. Les plaques de l'autre groupe, au nombre de h , doivent être attachées par leurs bords : 1° le long des bords tracés en gros; 2° de haut en bas, le long de deux côtés des prismes qui ont un bout de libre; 3° le long des prismes qui réunissent les sphères, elles n'auront pas de bords libres. Les prismes mentionnés sous 2° peuvent être incorporés dans les plaques.

Pour former le diagramme (correspondant d'abord à n percements), on peut donc procéder comme suit : d'abord on note les arcs de C munis d'une caractéristique déterminée; ils vont d'un point double où la branche correspondante de F est la branche inférieure jusqu'au point double où la même chose arrive la prochaine fois. Sur les n sphères $z_1, z_2, \dots, z_n$, on trace alors les lignes fortes à l'aide des caractéristiques dérivées. (Comparer les dessins schématiques, p. 225, et le passage en italique p. 226.) Ces deux caractéristiques indiquent les numéros des deux sphères sur lesquelles se trouvent les points doubles auxquels les bouts du fil leur appartenant doivent être attachés; nous appellerons ces deux points : *les points de jonction* appartenant au point double. Les dessins schématiques montrent le cours de la ligne tracée en gros aux points

de jonction pareils suivant que le point double est du premier, du deuxième, ou du troisième type. A chaque arc de la ligne ab correspond une plaque; il est facile de déterminer sur les sphères et sur les fils (les prismes), la ligne le long de laquelle le bord de la plaque doit être attaché. Sur ab nous fixons une direction positive de a à b , et alors sur tous les arcs tracés en gros qui correspondent en leur ensemble à ab pris deux fois, une direction positive se trouvera fixée. Partons maintenant d'un des points de jonction correspondant à a et parcourons la branche correspondant à ab qui part de ce point; suivons celle-ci jusqu'à ce que, allant toujours dans la direction positive, nous rencontrons un point de jonction correspondant à b ; cependant, chaque fois qu'auparavant nous rencontrons un point de jonction, nous passerons le long du fil à l'autre sphère. Au point de jonction qui correspond à b , nous passerons le long du fil à l'autre point de jonction, et nous parcourons de même que tout à l'heure, mais cette fois en direction négative, les arcs qui restent, jusqu'à ce que nous arrivions à l'autre point de jonction correspondant à a . On ferme la courbe en parcourant le fil qui aboutit à ce point.

Pour obtenir que le diagramme corresponde à un seul perçement, on n'a qu'à percer et ensuite enlever $n - 1$ plaques convenablement choisies; le diagramme qui consiste maintenant en n sphères réunies par h fils et $h - n + 1$ plaques est réduit de la manière ordinaire à un diagramme à une sphère centrale, $h - n + 1$ fils, et $h - n + 1$ plaques.

Jusqu'à ce point, l'examen a pu être effectué d'une façon tout à fait analogue à celui des surfaces de Riemann (p. 194 et suiv.). Pour ces dernières, le nombre de connexion pouvait être déterminé sur la base des éléments trouvés; mais pareille chose ne peut pas être faite ici. Une des causes a déjà été mentionnée; en outre, il faut remarquer que, tandis que le nombre de connexion pour les surfaces de Riemann ne dépend que du nombre des feuilletts et des lignes de ramification, les nombres de connexion pour les espaces de Riemann dépendent (sans compter le nombre des couches, celui des lignes fermées constituant en leur ensemble le système de ramification, les enlacements et les nœuds de celle-ci) *en outre* des caractéristiques, auxquelles on peut en général, dans une certaine mesure, donner des valeurs indépendantes des

premiers nombres. Nous ne pousserons donc pas plus loin l'étude des généralités : nous nous bornerons à considérer quelques exemples simples.

Il sera commode d'imaginer que la courbe de ramification est infiniment près d'être plane. Cela peut se faire, puisque la connexion de la variété ne se modifie pas par des déplacements continus de la ligne de ramification, pourvu qu'aucune partie ne vienne à couper une autre partie. Il est à recommander d'enlever tous les enlacements et nœuds qui peuvent être enlevés. On se figurera aussi, sans difficulté, les n sphères transformées en disques circulaires situés les uns au-dessous des autres sous le plan, qui est parcouru maintenant par la ligne de ramification ; comme courbes $C_1, C_2, \dots, C_n$, nous pouvons choisir les projections de F sur les faces supérieures des disques. En un point double du troisième type, peu importe la branche que l'on s'imagine en haut.

NIV. — APPLICATIONS.

1. Si $n = 2$ et si F se compose d'une courbe simple, fermée, et sans nœuds, le diagramme devient un point. P_2 est équivalent à un espace sphérique.

2. La ligne de ramification se compose de deux courbes simples, fermées, sans nœuds, et non enchaînées ; $n = 2$. D'abord, on obtient deux corps en forme de tuyaux reliant les deux disques centraux (si d'un point sur un disque central *intérieur* à la ligne d'attachement du tuyau, on sort sur l'autre disque central en *dehors* de la ligne d'attachement du tuyau). Un des tuyaux doit être percé, et il est ainsi réduit à un fil. Le diagramme est un fil circulaire auquel la plaque est adjointe le long d'une courbe méridienne.

3. La ligne de ramification se compose de c courbes simples, fermées, sans nœuds, et non enchaînées ; l'espace est supposé à n couches, et les caractéristiques des lignes de ramification sont choisies de façon qu'il soit connexe. Le diagramme est formé par n disques réunis par $c - n + 1$ tuyaux de l'exemple précédent, et par $n - 1$ fils. Puisque la surface est équivalente à la surface d'une sphère, on peut déformer les fils de façon que le premier

aille de z_1 à z_2 , le suivant de z_2 à z_3 , ..., le dernier de z_{n-1} à z_n . Les fils et les disques sont alors rassemblés en une sphère centrale. Il n'y a aucune difficulté à voir que chaque tuyau peut être transformé en un fil auquel est adjoint une plaque le long d'une courbe méridienne. L'espace donné est équivalent à un espace sphérique muni de $r = n + 1$ anses.

4. La ligne de ramification est une courbe fermée formant un nœud simple; $n = 3$. La projection aura l'aspect d'une courbe de quatrième ordre à trois points doubles sans nœuds; tous trois seront du deuxième type. La construction du diagramme est une simple application de la théorie précédente, et nous nous bornerons à citer le résultat : on obtient un fil auquel la plaque est attachée le long d'une courbe de latitude; le diagramme se réduit donc à une sphère centrale, et la variété proposée est *équivalente à un espace sphérique*.

5. Même ligne de ramification qu'au n° 4, mais $n = 2$. Les trois points doubles seront du premier type; le diagramme est un fil auquel la plaque est attachée le long d'une courbe $[3\beta + \lambda]$.

6. La ligne de ramification se compose de deux courbes fermées, sans nœuds et s'entrelaçant simplement; $n = 2$. La projection peut être formée de deux cercles qui s'entrecoupent; les deux points doubles sont du deuxième genre. Le diagramme est un fil auquel la plaque est attachée le long d'une courbe $[2\beta + \gamma]$.

Appliquons ce que nous venons d'avancer à la théorie des surfaces algébriques. Le voisinage d'un point général de la surface est limité par un espace équivalent à un espace sphérique. Nous allons déterminer la nature de la frontière si le point est singulier. Comme frontière du voisinage d'un point dans **T**, on peut prendre un espace sphérique, mais souvent il sera commode, au lieu d'opérer ainsi, de déterminer le voisinage comme la variété à 4 dimensions décrite par une sphère dans **P** lorsque sur celle-ci on place tous les chiffres de cote d'un chiffre α à un chiffre β .

7. *Le voisinage d'un point ordinaire sur la surface de ramification de la variété à quatre dimensions représentant une*

surface algébrique (voir p. 188) est équivalent à un espace sphérique. La frontière est formée par l'espace de Riemann mentionné dans l'exemple 1.

8. Soit le point *un point de ramification de première espèce sur la courbe de ramification*. Le voisinage est limité par un espace de Riemann à trois courbes ; la ligne de ramification est une courbe fermée, faisant deux tours sur la surface de ramification avant de se fermer, mais ne formant pas de nœud ; elle peut donc être transformée en une simple courbe fermée. L'exemple 1 montre que la *frontière est équivalente à un espace sphérique*.

9. Soit le point *un point de ramification de deuxième espèce*. La ligne de ramification forme un nœud simple. Le point se présente quand une tangente principale de la surface algébrique devient parallèle à l'axe des Z ; Puisque la tangente coupe la surface en trois points coïncidents, on aura un espace de Riemann à trois couches.

La frontière est formée par un espace de Riemann comme celui de l'exemple 4 ; elle est donc *équivalente à un espace sphérique*.

10. Supposons que la surface algébrique ait un *point double isolé* dont le cône des tangentes soit une surface irréductible du deuxième ordre. Pour examiner le voisinage d'un tel point, il suffit d'examiner le voisinage du sommet d'une surface conique irréductible du deuxième ordre. La section de celle-ci par le plan XY se compose de deux droites se coupant au sommet ; elles sont représentées dans $\mathbf{T}$ par deux plans coupant suivant deux courbes fermées un espace sphérique Σ dont le centre est à l'origine. Si l'espace sphérique est transformé en P de la manière indiquée ci-dessus, on voit facilement que ces courbes deviennent deux courbes simples, simplement enchaînées (exemple 6). Car les courbes qui, dans Σ , correspondent aux deux courbes fermées sont deux ellipses dont celle qui correspond à la plus grande valeur du coefficient de direction renferme l'autre, puisque les projections sur le plan X_1Y_1 sont des cercles concentriques. Les deux

moitiés des ellipses portant des chiffres de cote négatifs sont inverties ; et ainsi, la branche auparavant en dedans est placée en dehors.

Si l'on désire une définition analytique de cette variété, on n'a par exemple qu'à décomposer

$$z^2 = x^2 - y^2$$

en ses parties réelle et imaginaire

$$\begin{aligned} z_1^2 - z_2^2 &= x_1^2 - x_2^2 - y_1^2 + y_2^2, \\ z_1 z_2 &= x_1 x_2 - y_1 y_2, \end{aligned}$$

en y ajoutant l'équation

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1.$$

Ceci montre que la variété est de celles auxquelles la théorie topologique de Poincaré-Picard doit être applicable, ce qui ressort aussi d'ailleurs de nos recherches antérieures ⁽¹⁾.

Le voisinage de chacun des points mentionnés dans les exemples 7, 8 et 9 est une variété élémentaire à 4 dimensions. On peut le voir facilement en construisant, par exemple, un faisceau à 3 dimensions de courbes rayonnant du point examiné par nous, de façon que, par chaque point de la variété, il passe une et une seule courbe ; si une courbe contient un point de la surface de ramifi-

(1) Si une surface S présente des singularités, on la transforme d'abord birationnellement en une surface S' sans singularités située dans un espace à un nombre suffisamment élevé de dimensions. On pourrait objecter que la topologie de S' dépend en quelque sorte de la transformation employée, puisque certains points ordinaires de S peuvent être transformés en courbes de S' et *vice versa*. Mais M. Enriques a démontré que si S' n'appartient pas à la famille des réglées, elle possède un nombre fini de courbes (les courbes exceptionnelles) qui peuvent être transformées en des points ordinaires et que ces courbes peuvent être enlevées successivement par des transformations birationnelles. Ainsi, on ramène la surface S à une surface canonique sans singularités et sans courbes exceptionnelles. Même si la surface ne possède pas de singularités, il faut se débarrasser des courbes exceptionnelles si l'on veut obtenir des caractères topologiques jouant le rôle d'invariants.

Pour les surfaces de la famille des réglées, on trouve des formes normales en faisant d'autres conventions. (*Note du Traducteur.*)

cation, elle doit avoir son cours entièrement dans celle-ci, et de même si elle contient un point d'une ligne double de la surface de ramification. Si ensuite la frontière du voisinage est transformée en un espace sphérique Σ dans $\mathbf{T}$, le voisinage lui-même peut être transformé en la partie de $\mathbf{T}$ intérieure à Σ en faisant correspondre les courbes du faisceau mentionné aux rayons de Σ passant par les points qui correspondent aux points finaux des courbes. D'ailleurs, cela résulte aussi du fait que, par un déplacement de la surface par rapport au système de coordonnées, on peut obtenir que le point ne se trouve plus sur la surface de ramification.

On ne peut pas faire cela pour un point multiple isolé de la surface algébrique, et nous avons déjà vu (exemple 10) que le voisinage d'un point double isolé, point conique à cône de tangentes irréductible, n'était pas une variété élémentaire. La frontière était équivalente à P deux fois couvert, la ligne de ramification était formée par deux cercles simplement enchaînés. C'est la même variété que nous avons rencontrée à plusieurs reprises. On pourrait aussi la représenter par la jonction de deux tores, en joignant les courbes de latitude et méridiennes de l'une avec les courbes $[\beta]$ et $[2\beta + \lambda]$ de l'autre. Le diagramme est fermé par un fil auquel la plaque est attachée le long de la ligne $[2\beta + \lambda]$.

Nous allons maintenant prouver, comme nous l'avons annoncé, que cette variété a les nombres de connexion $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ ⁽¹⁾.

(1) D'après la définition de Poincaré, une variété V est homologue à 0

$$V \sim 0,$$

si la variété comptée n fois forme frontière, n étant un entier quelconque. En employant cette définition, le théorème de Poincaré et Picard qui vient d'être énoncé et le théorème que $p_{n-i} = p_i$ sont sans doute exacts.

Dans son premier Mémoire sur l'*Analysis situs*, Poincaré ne s'est sans doute pas aperçu que de

$$V \sim 0$$

on ne pouvait pas conclure que la variété V était frontière, ce qui explique les erreurs signalées par M. Heegaard. La question a été reprise par Poincaré (2° et 3° compléments, *loc. cit.*) et les théorèmes en question mis hors de doute.

[Il serait peut-être bien de remarquer que, lorsque Poincaré étudie une variété en la découpant en un polyèdre et en étudiant à l'aide de certaines équations

Pour trouver les courbes fermées qui ne peuvent pas être déformées en un point, nous observons que toute courbe fermée de la variété peut être amenée à prendre son cours entièrement dans le fil du diagramme. On peut supposer qu'elle circule toujours dans la même direction et sans former de nœuds. Une courbe qui parcourt le fil deux fois avant d'être fermée peut alors être amenée à prendre son cours entièrement sur la bande; elle peut donc être déformée en un point à travers la plaque. Si la courbe fait $2p$ fois le tour, on peut successivement éliminer et enlever p fois deux tours qui se succèdent. La courbe peut ainsi être ramenée à un point. Si la courbe fait $2p + 1$ tours, on la ramène à une courbe faisant un tour. *Celle-ci ne peut pas être déformée en un point.* Supposons que la courbe limitait un élément de surface bilatère de la variété. Nous perçons dans celle-ci un canal en forme de tuyau le long de la courbe; ainsi la variété aura pour frontière une surface de tore. Si nous nous figurons la variété définie par la jonction de deux surfaces de tore, de la façon ci-dessus indiquée ce canal fera une fois le tour d'un de ces tores, et l'élément de surface sera limité par une courbe de latitude de la surface du canal. Mais du moment que nous avons percé ce canal, nous pouvons déformer la variété en un tore situé dans P : dans celui-ci, se trouve l'élément de surface mentionné, limité par une courbe de latitude sur la surface du tore. Cette courbe de latitude fait une fois le tour de l'axe du tore et, en même temps, elle limite un élément de surface dans le tore, c'est-à-dire un élément de surface dans P qui ne coupe pas l'axe du tore; ce qui est impossible. Donc $p_1 = 2$.

Toutes les surfaces fermées de la variété (qu'elles soient bilatères ou unilatères) peuvent être amenées à prendre leurs cours entièrement dans le diagramme, et les parties qui se trouvent dans la plaque peuvent être déformées en de simples éléments de surface dont le bord est dans le bord de la plaque et qui sont ainsi

linéaires les sous-variétés de diverses dimensions que l'on obtient en combinant les éléments du polyèdre, ces sous-variétés *ne satisfont pas à la définition de variété donnée par lui*, car elles auront en général des singularités. Au fond, ce fait est sans importance, car dans le voisinage d'une variété ayant des singularités, on peut en former une autre sans singularités.]

(Note du Traducteur.)

rattachées à la partie restante de la surface par la bande d'attachement de la plaque. Si la surface n'a qu'un seul élément de surface couvrant la plaque, le bord de celui-ci sera une courbe $[2\beta + \lambda]$ sur la surface du fil; cette courbe limitera donc une portion de surface située dans le fil; mais il n'existe aucune surface *bilatère* dans le fil qui ait cette courbe comme frontière, puisque la courbe circule deux fois autour de l'axe du tore dans la même direction. Par contre, l'élément de surface peut être fermé par la surface *unilatère* de Möbius. Si ensuite la surface a plusieurs éléments dans la plaque, on peut en percer deux qui se succèdent et réunir les bords par un tuyau; si la surface primitive n'était pas frontière, la nouvelle ne l'est pas non plus. S'il y en a un nombre pair d'éléments de surface dans la plaque, toutes ces plaques peuvent être soumises à cette opération, deux à deux, après quoi, elles sont toutes facilement poussées hors de la plaque de façon que la surface soit entièrement dans le fil. S'il y en a un nombre impair, on peut de la même manière les enlever tous excepté 1, et l'on est ramené au cas mentionné au commencement où, comme nous l'avons vu, la surface devait être unilatère. Si donc il doit se trouver dans notre variété une surface fermée et bilatère qui ne soit pas frontière, il doit s'en trouver une telle dans le fil; mais chaque surface fermée et bilatère dans le fil peut être ramenée soit à un point soit à un point duquel partent des courbes retournant au point; c'est-à-dire que toutes surfaces pareilles sont homologues à 0. Donc $p_2 = 1$.

Nous voyons donc que *la variété représentant une surface algébrique avec des points multiples isolés contient des points pour lesquels le voisinage n'est pas une variété élémentaire*. Nous appellerons de tels points des *points singuliers topologiques*.

Mais les variétés définies par Picard et Poincaré ne contiennent que des points dont l'entourage est simplement connexe (*P. et S.*, Chap. II, nos 2 et 3; *POINCARÉ, A. S.*, § 2 et 3). c'est-à-dire ne possèdent pas de points singuliers topologiques. Que devient alors le théorème : « Toute surface algébrique à singularités arbitraires correspond birationnellement à une surface qui n'a d'autres singularités qu'une courbe double à points triples, ces singularités étant les plus générales de leur espèce ? » (*P. et S.*, Chap. IV, n° 8). Dans le premier cas, on peut toujours trouver des singula-

rités topologiques, mais, comme c'est facile à voir, dans le second cas, on n'en trouve point. On découvre facilement l'explication de ce fait en suivant les transformations par lesquelles la surface est réduite à la forme mentionnée. Un point multiple isolé devient un point singulier pour la transformation, de sorte qu'il correspondra à une courbe algébrique ne passant pas par des points multiples. La frontière du voisinage du point double est alors équivalente à l'enveloppe de la courbe algébrique correspondante. Dans la théorie de M. Picard, les surfaces sont ainsi débarrassées de leurs points singuliers topologiques.

Au point de vue topologique, il y a donc une différence essentielle entre les surfaces de Riemann et les variétés qui représentent les surfaces algébriques. Car tandis que sur celles-là le voisinage de chaque point est une variété élémentaire (la surface tournant autour d'un point de ramification en est une aussi), il n'en est pas toujours ainsi pour celles-ci. Pour les coordonnées du voisinage de chaque point d'une courbe algébrique, on forme facilement des développements en séries holomorphes d'un paramètre, mais on n'a pas réussi à représenter les coordonnées du voisinage de chaque point d'une surface algébrique par de telles séries à deux paramètres, et ceci est évidemment lié à l'existence de pareils points singuliers. Au théorème : « Par un système limité de pareilles séries on peut représenter tout le voisinage de chaque point sur la surface », correspond cet autre : « Le voisinage d'un point singulier topologique peut être obtenu en rassemblant un nombre fini de variétés élémentaires »; ceci résulte de ce que la frontière puisse être obtenue en rassemblant un nombre fini de variétés élémentaires. (Le cône ayant pour sommet le point et pour directrice le diagramme de la frontière rendra, comme coupe, le voisinage simplement connexe.)

* Désignons la surface primitive par f , et celle que nous obtenons en débarrassant f de ses points singuliers topologiques par F ; nous pourrions nous poser le problème de construire la variété qui représente f , connaissant celle qui représente F . On cherche les surfaces fermées qui correspondent sur f à chaque point multiple isolé et aux autres points fondamentaux de la transformation. On découpe le voisinage de ces surfaces fermées et l'on referme la variété en ajoutant des variétés équivalentes aux voisinages des

points correspondants de f . Les points de F qui sont des points singuliers de la transformation sont traités de la manière opposée.

Dans l'exemple que nous venons de considérer, nous avons réussi à trouver, à partir du diagramme, les nombres de connexion. Dans sa généralité, ce problème est évidemment difficile à résoudre ⁽¹⁾. Cependant le diagramme peut servir à trouver des *limites supérieures pour les nombres de connexion*, mais la difficulté consiste à juger si les variétés trouvées à l'aide du diagramme, et qu'on suppose homologiquement indépendantes, le sont en réalité. *La théorie des intégrales peut servir ici comme un expédient* (cf. *P. et S.*, Chap. IV, n° 9), *mais elle n'est pas suffisante*. Car le théorème général avancé par Poincaré et Picard : « Le nombre de périodes linéairement indépendantes des intégrales (définies de la manière la plus générale) prises le long de variétés fermées à m dimensions est $p_m - 1$ (POINCARÉ, *A. S.*, § 7, fin; *P. et S.*, Chap. II, n° 16) n'est pas exact ⁽²⁾. On se rappelle que, dans l'exemple plusieurs fois cité, il existait une courbe ne formant pas frontière. Or, toutes les intégrales prises le long de cette courbe doivent être nulles; car si l'on parcourt deux fois la courbe, on obtient une courbe qui peut être déformée en un point; donc, l'intégrale doit être zéro. On y voit aussi que l'on ne peut pas toujours conclure de l'homologie $2V \sim 0$ que $V \sim 0$ (POINCARÉ, *A. S.*, p. 19, l. 4).

⁽¹⁾ On peut résoudre le problème immédiatement maintenant à l'aide des méthodes plus récentes de Poincaré [2^e et 3^e compléments à l'*Analysis situs*; *Rendiconti di Palermo*, 13 (1899), et *Proceedings of London Math. Soc.*, 32 (1900)]. Car, du diagramme de M. Heegaard, on déduit tout de suite les Tableaux de Poincaré qui donnent facilement les nombres de connexion.

(Note du Traducteur.)

⁽²⁾ On doit se mettre en garde contre l'erreur de conclure que toute courbe qui est frontière peut être ramenée à un point par déformation continue. Pour qu'une courbe puisse être ramenée à un point, il faut qu'elle soit frontière d'un élément de surface *simplement connexe* (avec peut-être des singularités). Une courbe peut très bien être frontière d'une surface sans être frontière d'un élément. Voir la variété ayant les nombres de connexion $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $P_3 = 1$ et sans torsion qui n'est cependant pas homéomorphe à l'hypersphère [POINCARÉ, 4^e complément à l'*Analysis situs* (*Rendic. di Palermo*)].

(Note du Traducteur.)

REMARQUES FINALES.

Il semblerait peut-être inutile d'essayer de former une théorie topologique de la connexion des surfaces algébriques si l'on n'a même pas réussi à résoudre dans toute sa généralité le problème des variété à 3 dimensions. Il faut remarquer, cependant, que la variété à 4 dimensions qui représente une surface algébrique est une variété *spéciale* et que l'on peut s'attendre à ce qu'elle soit relativement simple au point de vue topologique. Le théorème de M. Picard : « Sur une surface algébrique sans points multiples, il n'y a pas de lignes fermées ne formant pas frontière » fait penser à quelque chose de ce genre (*P. et S.*, Chap. IV, § III).

Je n'ai pas encore pu obtenir un résultat complet; j'avancerai seulement, pour terminer, quelques remarques détachées. Ce qui m'a décidé à publier ces études préliminaires, c'est d'un côté le sentiment que l'on devait chercher à pénétrer les autres points de vue de nature transcendante, algébrique et de géométrie énumérative qui ont *présidé* à l'étude des surfaces algébriques; *d'un autre côté*, c'est la publication du Livre de MM. Picard et Simart, aussi bien à cause des parties de celui-ci qui ne sont pas d'accord avec mes propres recherches qu'à cause de celles qui les confirment.

Pour déterminer la connexion du plan, nous nous sommes placés au point de vue projectif en ce qui concerne les points à l'infini; *nous ne pouvons donc pas aboutir au même résultat que M. Picard* (*P. et S.*, Chap. IV, n° 9). D'après sa définition, la région infinie du plan est composée : 1° d'un ensemble de points $x = \infty$, y arbitraire, limité; 2° d'un ensemble de points x arbitraire, limité, $y = \infty$; 3° du point $x = \infty$, $y = \infty$. Nous considérons chacun des deux ensembles comme un point (les points à l'infini sur l'axe des X et sur l'axe des Y), et en tenant compte des différentes valeurs de la limite $\frac{y}{x}$ lorsque x et y augmentent indéfiniment, nous obtenons tout un ensemble de points au lieu du point 3°. En nous appuyant sur les résultats du paragraphe IV, nous déterminerons facilement le diagramme du plan projectivement défini. En perçant la variété **A**, celle-ci peut-

être complètement enlevée; ainsi $\Sigma_1(\mathbf{B}')$ et $\Sigma_2(\mathbf{C})$ deviennent des frontières libres pour $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$. Celles-ci peuvent être déformées de façon à être réduites au voisinage de la ligne à l'infini; voici donc le diagramme. On obtient ainsi :

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 1 \quad (1).$$

Pour que $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ soit limité par un espace équivalent à un espace sphérique, il faut joindre $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ d'une manière spéciale, à savoir, la manière déterminée par les équations (5) au paragraphe IV. Ce sont les espaces $\Sigma_1(\mathbf{B})$ et $\Sigma_2(\mathbf{C})$ qui doivent être joints; ils sont limités par $\tau(\mathbf{B})$ et $\tau(\mathbf{C})$ que l'on joint de façon que les courbes méridiennes du premier couvrent celles du dernier, tandis que les courbes de latitude du premier (η constant) correspondent aux courbes du type $[\beta + \lambda]$ du dernier. On voit aussi sans difficulté que le diagramme pour $\Sigma_1(\mathbf{B}) + \Sigma_2(\mathbf{C})$ (jointes selon cette règle) devient un point. Si on les avait jointes selon les formules $\xi = \xi'$ et $\eta = \eta'$, la frontière aurait eu les nombres de connexion $p_1 = 2, p_2 = 2$; donc elle n'aurait pas été équivalente à un espace sphérique.

Deux surfaces fermées, par exemple de genre 0, situées dans une variété à 4 dimensions sont toujours équivalentes, mais, comme nous le voyons, leurs *entourages* ne le sont pas nécessairement. Voilà la différence entre ce que nous avons appelé *équivalence* et ce que Poincaré appelle *homéomorphisme* (POINCARÉ, *A. S.*, § 2).

Pour la surface du deuxième ordre F_2 , j'ai trouvé

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 1,$$

en formant le diagramme selon l'exposé du paragraphe V. Le noyau de ce diagramme est composé de deux surfaces fermées de genre 0 qui se coupent en un point. Le même résultat se trouve très facilement comme suit : une génératrice variable dans l'un des systèmes de génératrices est déterminée par son rapport anharmonique avec trois génératrices fixes; de la même manière,

(1) Ces nombres sont les mêmes si l'on emploie la définition de Poincaré. Il en est de même pour les nombres obtenus pour la quadratique et la cubique.

(Note du Traducteur.)

une génératrice dans l'autre système est déterminée par un rapport y . Chaque point sur la surface est alors complètement déterminé par les valeurs de x et de y correspondant aux génératrices passant par le point, et *vice versa*. (∞, ∞) n'est qu'un point; (∞, y) et (x, ∞) correspondent à deux génératrices se coupant au point (∞, ∞) . Selon le point de vue de M. Picard, le plan sera donc ce que, d'après notre conception projective, nous appelons une surface du deuxième ordre. Si la variété à 4 dimensions (x, y) est percée au point $(0, 0)$, l'ouverture peut être élargie jusqu'à ce que la frontière rencontre les deux surfaces fermées et s'entre-coupant qui correspondent à (∞, y) et (x, ∞) . On aboutit alors au même résultat que tout à l'heure (comparer d'ailleurs $P.$ et $S.$, Chap. IV, n° 9; Chap. II, n° 16).

Les nombres de connexion pour le plan et la surface de deuxième ordre sont d'accord avec le nombre de points fondamentaux de la transformation biunivoque de *Chasles*.

Quant à la surface de troisième ordre F_3 , j'ai d'abord essayé de l'examiner de la même manière que F_2 , en m'appuyant sur les recherches du paragraphe V. Mais ici j'ai rencontré des difficultés provenant des lignes doubles dans la projection de la surface de ramification sur P , et de leurs points triples. J'ai alors essayé de trouver les nombres de connexion en faisant une transformation. D'un côté, j'ai transformé la surface en une autre de deuxième ordre F_2 en faisant correspondre, aux deux systèmes de génératrices de F_2 , les deux systèmes de coniques découpées sur F_3 par deux systèmes de plans passant respectivement par deux droites A et B de F_3 qui ne se coupent pas. La transformation aura 5 points fondamentaux sur la surface F_2 , à savoir les points correspondant aux 5 paires de plans passant par A et B qui se coupent sur une des 5 droites (parmi les 27 droites sur la surface F_3) coupant A et B . Pour transformer F_3 en un plan, j'ai établi la correspondance entre les deux surfaces à l'aide d'une droite variable passant par un point de A et un point de B , A et B étant deux droites de F_3 ne se rencontrant pas; dans le plan, on aura d'abord 5 points fondamentaux, correspondant aux points d'intersection du plan avec les 5 droites de F_3 coupant A et B , et en outre deux points fondamentaux aux points d'intersection a et b avec A et B ; à ceux-ci correspondent deux coniques φ et ψ sur F_3 détermi-

nées par les plans (Ab) et (Ba). Le point d'intersection de celles-ci (le troisième point d'intersection de ab avec F_3) sera un point fondamental sur F_3 correspondant à la ligne ab du plan. On emploie plus facilement la transformation birationnelle ordinaire qui se trouve par exemple chez Salmon (*Geometry of 3 dimensions*, 4^e édition, p. 556); il y a six points fondamentaux dans le plan, correspondant à un *six double* sur F_3 .

Ces transformations conduisent aux nombres de connexion

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 8, \quad p_3 = 1.$$

Il n'est pas trop difficile de prouver par voie topologique le théorème de M. Picard : $p_1 = p_3 = 1$ si la surface n'a pas de points multiples. Pour trouver p_2 , j'ai essayé de procéder comme à la fin du paragraphe VIII en imaginant la surface infiniment près de se décomposer en n plans; un intérêt spécial s'attache à l'examen de $n = 2$ et $n = 3$. J'espère pouvoir, plus tard, donner à toutes ces recherches une forme assez complète pour qu'elles puissent être publiées en continuation de ces études. Il faudrait aussi étudier les relations entre les nombres de connexion topologiques p_1, p_2 et p_3 d'un côté, et les différents « invariants » $p_g, p_n, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots$ de l'autre.

Voilà un vaste champ pour de futures recherches, lesquelles sont rendues difficiles aussi bien par la nature compliquée du sujet que par la large base des méthodes.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XLIV.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, nouvelle édition, 1908.)

	Pages.
[O ¹ 4f] Barré (O.). — Sur quelques surfaces réglées à directrice rectiligne.	40
[O ¹ 6k] Cartan (E.). — La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien réel à n dimensions.....	65
[L ¹ 14a] Fouché (M.). — Sur la transformation doublement quadratique, les polygones de Poncelet et l'involution multiple.....	120
[H6b] Goursat (Ed.). — Sur quelques remarques relatives au problème de Pfaff.....	13
[D1a] Hedrick (E.-R.) et Westfall (W.-D.-A.). — Sur l'existence des fonctions implicites.....	1
[Q3b] Heegaard (P.). — Sur l'« Analysis Situs ».....	161
[D3a] Priwaloff (I.). — Sur les fonctions conjuguées.....	100
[D4a] Valiron (G.). — Sur la croissance du module maximum des séries entières.....	45
[D4a] Valiron (G.). — Sur l'interpolation des fonctions entières....	103
[D1a] Westfall (W.-D.-A.) [voir Hedrick (E.-R.)].....	1

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XLIV.

1

D

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1916.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie},
58384 55, quai des Grands-Augustins.

13.
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE L'ANNÉE 1916.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET C^e, ÉDITEURS
LIBRAIRES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1917

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ÉTAT DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1916 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau....	MM. APPELL. DARBOUX. DEMOULIN. DERUYTS. HADAMARD. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. LECORNU. MITTAG-LEFFLER. NEUBERG. PAINLEVÉ. PICARD. VALLÉE POUSSIN (DE LA). VOLTERRA. ZEUTHEN.
----------------------------------	---

Président.....	MM. FOUCHÉ. FONTENÉ. GUICHARD. LEBESGUE. MAILLET. P. LÉVY. MONTEL. FATOU. TRESSE. CAHEN. SERVANT. BIOCHE, 1917. BLUTEL, 1919. BOREL, 1917. BOULANGER, 1919. BRICARD, 1918. CARTAN, 1919. DRACH, 1917. FOURET, 1917. GRÉVY, 1918. GUICHARD, 1917. KOENIGS, 1918. VESSIOT, 1918. OCAGNE (D'), 1918.
Vice-Présidents.....	
Secrétaires.....	
Vice-Secrétaires.....	
Archiviste.....	
Trésorier.....	
Membres du Conseil ⁽²⁾	

⁽¹⁾ MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

⁽²⁾ La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

En raison de l'état de guerre actuel, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé de suspendre les relations de la Société avec ceux de ses membres qui appartiennent aux nations ennemies; en conséquence, les noms de ces membres ne figurent pas sur la liste ci-dessous :

Date
de
l'admission.

1872. ACHARD, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *La Foncière*, rue de la Terrasse, 6 bis, à Paris (17^e).
1900. ADHÉMAR (vicomte Robert d'), professeur à la Faculté libre des Sciences, place de Genevières, 14, à Lille (Nord).
1896. ANDOYER, professeur à la Faculté des Sciences, membre du Bureau des Longitudes, rue du Val-de-Grâce, 11, à Paris (5^e).
1894. ANDRUDE, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Villars, 3, à Besançon.
1872. ANDRÉ (Désiré), docteur ès sciences, rue Bonaparte, 70 bis, à Paris (6^e).
1879. APPELL, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue du Bac, 32, à Paris (7^e).
1910. ARCHIBALD (R.-C.), professeur à Brown-Université, Providence, Rhode Island (États-Unis).
1900. AURIC, ingénieur en chef des ponts et chaussées.
1900. BAIRE, professeur à la Faculté des Sciences, 24, rue Audra, à Dijon.
1896. BAKER, professeur à l'Université de Toronto (Canada).
1905. BARRÉ, capitaine du génie, docteur ès sciences mathématiques, rue Lhomond, 10, à Paris (5^e).
1875. BENDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône). S. P. (1).
1891. BERTHARD DE FONTVILANT, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, avenue de Wagram, 167, à Paris (17^e). S. P.
1910. BERTHARD (G.), rue de la Vieille-Église, 2, à Versailles.
1913. BILIMOVITCH, privat-docent à l'Université de Kiew, rue Stanislas, 14, à Paris (6^e).
1888. BLOCHÉ, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6^e). S. P.
1891. BLUTEL, inspecteur général de l'Instruction publique, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14^e).
1902. BOBERIL (comte Roger du), rue d'Antibes, 114, à Cannes (Alpes-Maritimes). S. P.
1907. BOITEL DE DIENVAL, ancien élève de l'École Polytechnique, au château de Valsery, à Cœuvres (Aisne). S. P.
1892. BONAPARTE (prince), membre de l'Institut, avenue d'Iéna, 10, à Paris (16^e).
1895. BOREL (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale, rue d'Ulm, 45, à Paris (5^e). S. P.
1913. BORTOLOTTI (E.), professeur à l'Université de Modène, via Maggiore, 18, à Bologne, (Italie).
1909. BOULAD (F.), ingénieur au service des ponts des chemins de fer de l'État égyptien, au Caire (Égypte).
1896. BOULANGER, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 68, à Paris (5^e).
1913. BOULIGAND, agrégé de mathématiques, docteur ès sciences, 9, rue de la Scellerie, à Tours (Indre-et-Loire).
1896. BOURGET (H.), directeur de l'Observatoire, à Marseille.
1903. BOUTIN, rue Lavieuville, 26, à Paris (18^e).

(1) Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

Date
de
l'admission.

1904. BOUTROUX (P.), professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers. S. P.
1900. BREITLING, proviseur du lycée Buffon, boulevard Pasteur, 16, à Paris (14°).
1911. BRATU, professeur, strada Golici, 8, à Jassy (Roumanie).
1897. BRICARD, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 108, à Paris (14°).
1873. BROCARD, lieutenant-colonel du génie territorial, rue des Ducs-de-Bar, 75, à Bar-le-Duc. S. P.
1912. BROWNE, Grange Mockler, à Carrick-on-Suir (comté de Tipperary, Irlande).
1901. BUIL, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Coffres, 11, à Toulouse.
1894. CAHEN, chargé de cours à la Sorbonne, rue Cortambert, 46, à Paris (16°).
1893. CALDARELLA, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Libertà, à Palerme (Italie).
1885. CARON, chef honoraire des travaux graphiques à la Sorbonne, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).
1892. CARONNET, docteur ès sciences mathématiques, avenue Niel, 15, à Paris (17°).
1896. CANTAN, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Vaugirard, 174, à Paris (15°).
1887. CARVALLO, directeur des études à l'École Polytechnique, rue Descartes, 21, à Paris (5°). S. P.
1890. CEDERCREUTZ (baronne Naam), Unionsgatan, 4, à Helsingfors (Finlande).
1911. CHALORY, professeur au lycée Carnot, rue de Vaugirard, 38, à Paris (6°).
1896. CHARVE, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, villa Gambie, 23, rue Va-à-la-Mer, à Marseille.
1911. CHATELET, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue du Japon, 12, à Toulouse.
1907. CHAZY, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Lille.
1913. COBLYN, capitaine du génie, rue des Vignes, 34, à Paris (16°).
1915. CONSTANTINIDÈS, professeur au gymnase de Phodos (Grèce).
1896. COSSERAT (E.), directeur de l'Observatoire, à Toulouse.
1900. COTTON (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble. S. P.
1914. CRELIER, professeur à l'Université de Berne, à Bienne (Suisse).
1904. CURTISS, professeur à l'Université Northwestern, Milburn Street, 720, à Evanston (Illinois, États-Unis).
1872. DARBOUTX, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, rue Mazarine, 3, à Paris (6°).
1885. DAUTHÉVILLE, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27, à Montpellier.
1901. DELASSUS, professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences, rue de Brach, 92, à Bordeaux.
1895. DELAUNAY (N.), professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1913. DELVILLE (L.), ingénieur aux forges et aciéries de Huta-Binkowa, à Dombrowa (Pologne, Russie).
1885. DEMARTRES, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).
1892. DEMOULIN (Alph.), professeur à l'Université, rue Joseph-Plateau, 10, à Gand (Belgique).
1905. DENJOY, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Duguesclin, 3, à Montpellier.
1883. DERUYTS, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1894. DESAINT, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17°).
1900. DICKSTEIN, Marszałkowska, 117, à Varsovie.

Date
de
l'admission.

1914. **DOXDER (J. DE)**, rue Forestière, 11, à Bruxelles (Belgique).
1899. **DRACH**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, square Lagarde, 3, à Paris (5°).
1909. **DRURY**, bibliothécaire de l'Université, University Station, Urbana (Illinois, États-Unis).
1907. **DULAC**, professeur à la Faculté des Sciences, quai des Brotteaux, 4, à Lyon.
1896. **DUMAS (G.)**, docteur de l'Université de Paris, professeur à l'Université, Cabrières, avenue Mont-Charmant, à Béthusy-Lausanne (Suisse).
1897. **DUMONT**, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. **DUNCAN**, Consulting Engineer, Empire Building, Liberty Street, 55, New-York City.
1902. **EGOROFF (Dimitry)**, professeur à l'Université, Povarskaja, Borissoglebsky per., n° 8, à Moscou (Russie).
1915. **ESCLANGON**, astronome à l'Observatoire de Floirac (Gironde).
1912. **EISENHARDT (L.-P.)**, professeur à l'Université de Princeton, Alexander Street, 22, à Princeton (New-Jersey, États-Unis).
1916. **ELCUS**, banquier, rue du Colisée, 36, à Paris (8°). S. P.
1903. **ESPANET**, ingénieur civil, Brazil Railway Company, rue Louis-le-Grand, 9, à Paris.
1900. **ESTAVAVE**, docteur ès sciences, secrétaire de la Faculté des Sciences de Marseille.
1907. **EITZEL**, professeur de mathématiques et d'astronomie au Collège de Saint-Thomas, à Saint-Paul (Minnesota, États-Unis).
1896. **EUVERTE**, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Cleres, 18, à Paris (7°).
1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Chaptal, 17, à Montpellier.
1906. **FARAGGI**, professeur, galerie Sarlande, 1, à Alger.
1904. **FATOU**, docteur ès sciences, astronome-adjoint à l'Observatoire, boulevard du Montparnasse, 172, à Paris (14°).
1891. **FAUQUEMBERGUE**, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan.
1892. **FERR (Henri)**, professeur à l'Université, route de Florissant, 110, à Genève (Suisse).
1885. **FIELDS (J.)**, professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).
1881. **FLOQUET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.
1872. **FLYE SAINTE-MARIE**, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1897. **FONTENÉ**, inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, à Paris (5°).
1903. **FORD (WALTER B.)**, professeur de mathématiques à l'Université de Michigan, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1889. **FOUCHÉ**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5°).
1905. **FOUËT**, professeur à l'Institut catholique, rue Le Verrier, 17, à Paris (6°).
1872. **FOURET**, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17°). S. P.
1903. **FRAISSÉ**, inspecteur des études au Prytanée, à La Flèche (Sarthe).
1911. **FRIÉCHET**, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
1903. **FUETER**, ancien président de la Société mathématique suisse, ancien professeur à l'Université de Bâle, professeur à l'Université, Friedrichsplatz, 9^m, à Karlsruhe (Allemagne).
1911. **GALBRUN**, docteur ès sciences, avenue Émile-Deschanel, 14, à Paris (7°).
1900. **GALDEANO (Z.-G. DE)**, correspondant des Académies royales des Sciences de Madrid et de Lisbonne, professeur à l'Université, Calle del Coso, 99, à Saragosse (Espagne).
1906. **GARGAM DE MONCETZ**, licencié ès sciences, à Étoile (Drôme).
1872. **GARIEL**, inspecteur général des ponts et chaussées en retraite, professeur honoraire à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17°).

Date
de
l'admission.

1908. GARNIER, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
1911. GAIL, professeur à la Faculté des Sciences, cours Saint-André, 116, à Grenoble.
1896. GAUTHIER-VILLIAMS, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6°).
1890. GERBIA, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1906. GÉRARDIN, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy.
1897. GEBRANS, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1913. GIRAUD, agrégé de mathématiques, rue Le Verrier, 11, à Paris (6°).
1913. GODEAUX, rue Victor-Consin, 6, à Paris.
1903. GODEY, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16°).
1914. GOLOUBEFF (W.), agrégé de l'Université, rue Stanislas, 14, à Paris (6°).
1907. GOT (Th.), docteur ès sciences, section technique du génie, rue de Bellechasse, 39, à Paris (7°).
1881. GOURSAT, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Navarre, 11 bis, à Paris (5°). S. P.
1912. GRAMONT (A. DE), licencié ès sciences, rue de Ponthien, 62, à Paris (8°).
1896. GRÉVY, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).
1899. GUADET, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de l'Université, 69, à Paris (7°).
1906. GUERBY, professeur au collège Stanislas, rue d'Assas, 50, à Paris (6°). S. P.
1900. GUICHARD (C.), professeur à la Faculté des Sciences, rue Boulainvilliers, 14, à Paris (16°).
1907. GUICHARD (L.), professeur de mathématiques au collège de Barbezieux (Charente).
1896. HADAMARD, membre de l'Institut, professeur au Collège de France et à l'École Polytechnique, rue Humboldt, 25, à Paris (14°). S. P.
1894. HALSTED (G.-B.), Colorado State Teachers College, à Greeley (Colorado, États-Unis). S. P.
1901. HANCOCK, professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1909. HANSEN, privat-docent à l'Université, Strandboulevarden, 66, Copenhague (Danemark).
1872. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des Mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6°). S. P.
1905. HEDRICK, professeur à l'Université, South Ninth street, 302, à Columbia (Missouri, États-Unis).
1892. HERMANN, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5°).
1911. HERHOLTZ, professeur, avenue de Belmont, 28, à Montreux (Suisse).
1911. HOLMGREN, professeur à l'Université d'Upsal, à l'Observatoire, à Upsal (Suède).
1895. HOTT (S.), professeur à l'École St-Croix de Neuilly, boulevard Pereire, 218 bis, à Paris (17°). S. P.
1880. HUMBERT, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17°).
1907. HUSSON, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Tiercelins, 60, à Nancy.
1881. IMBER, ancien directeur des études à l'École Centrale, ancien membre du Conseil de l'École Centrale, place Voltaire, 2, à Paris (11°).
1896. JACQUET (E.), professeur, rue Lagarde, 3, à Paris (5°).
1914. JAGER (F.), licencié ès sciences, avenue de la Grande-Armée, 69, à Paris (16°).
1903. JENSEN (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des téléphones, Frederiksberg allée, 68, à Copenhague (Danemark).

Date
de
l'admission.

1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur honoraire à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 46, à Paris (7°). S. P.
1913. KASNER (E.), professeur à l'Université Columbia, à New-York (États-Unis).
1910. KÉRAVAL, professeur au lycée Louis-le-Grand, avenue du Maine, 46, à Paris (14°).
1913. KIVELIOVICH, licencié ès sciences, rue Laromiguière, 6, à Paris (5°).
1892. KOCH (H. von), professeur à l'École Polytechnique, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1880. KÖENIGS, professeur à la Faculté des Sciences, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Jacques, 77, à Paris (14°).
1913. KOSTITZIN (V.), avenue Villemain, 32, à Paris.
1907. KRYLOFF, ingénieur des Mines, professeur d'analyse à l'École supérieure des Mines de Petrograd, à Ouezd-Radomysl, Gitomirska Chaussée, Station Nelylitza, village Kolganowka, gouvernement de Kiew (Russie).
1897. LACAUCHIE, ingénieur civil, rue Brochant, 18, à Paris (17°).
1873. LAISANT, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, rue du Conseil, 5, à Asnières (Seine).
1906. LALESCO, maître de conférences à l'Université, str. Luterană, 31, à Bucarest.
1893. LANCELIN, astronome adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14°).
1896. LAROZE, ingénieur des télégraphes, rue Froidevaux, 8, à Paris (14°).
1908. LATTÈS, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 24, à Toulouse.
1896. LEAU, professeur au lycée Michelet, rue Denfert-Rochereau, 83, à Paris (14°).
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17°). S. P.
1896. LEBEL, professeur au lycée, rue Pelletier-de-Chambrun, 12, à Dijon.
1902. LEBESGUE, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris, rue Saint-Sabin, 35 bis, à Paris (11°).
1903. LEBEUF, directeur de l'Observatoire, professeur d'astronomie à l'Université, à Besançon.
1893. LECORNU, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5°).
1895. LÉMERAY, licencié ès sciences mathématiques et physiques, ingénieur civil du génie maritime, villa Véga, à Antibes (Alpes-Maritimes).
1904. LENOYNE (T.), rue Claude-Bernard, 41, à Paris (5°).
1895. LE ROUX, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 13, à Rennes.
1898. LE ROY, professeur au lycée Saint-Louis, rue Cassette, 27, à Paris (6°).
1891. LERY, agent-voyer en chef de Seine-et-Oise, rue Magenta, 5, à Versailles.
1900. LEVI CIVITA (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1907. LESGOURGUES, professeur au lycée Henri IV, rue Jean-Bart, 4, à Paris (6°).
1909. LÉVY (Albert), professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 86, à Paris (6°).
1907. LÉVY (Paul), ingénieur des mines, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, rue Chernoviz, 9, à Paris (16°).
1898. LINDELÖF (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajen, 15, à Helsingfors (Finlande).
1886. LIOUVILLE, ingénieur en chef des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, à Maure (Ille-et-Vilaine).
1912. LOVETT (E.-O.), Rice Institute, à Houston (Texas, États-Unis).
1902. LUCAS-GIRARDVILLE, à la Manufacture de l'État, à Tonneins.
1902. LUCAS DE PESLOUAN, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Rapp, 41, à Paris (7°).
1913. LUSIN, professeur adjoint à l'Université de Moscou, rue Stanislas, 14, à Paris (6°).
1895. MAILLET, ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine). S. P.

Date
de
l'admission.

1905. MALUSKI, proviseur du lycée de Marseille.
1906. MARCUS, licencié ès sciences, rue Berthier, 6, à Nemours (Seine-et-Marne).
1904. MAROTTE, professeur au lycée Charlemagne, rue de Renilly, 35 bis, à Paris (12^e).
1884. MARTIN (Artemas), 918 N. Street, N. W., à Washington D. C. (États-Unis).
1889. MENDIZABAL TAMBOREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique). S. P.
1884. MERCEREAU, licencié ès sciences, docteur en médecine, rue de l'Université, 191, à Paris (7^e). S. P.
1902. MERLIN (Émile), chargé des cours d'astronomie mathématique et de géodésie à l'Université, rue d'Ostende, 11, à Gand (Belgique).
1904. METZLER, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1909. MICHEL (Charles), professeur au lycée Saint-Louis, rue Sarrette, 14, à Paris (14^e).
1893. MICHEL (François), ingénieur, licencié ès sciences, chef du service des parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10^e).
1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1907. MONTEL, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, boulevard de Vaugirard, 57, à Paris (15^e).
1898. MONTESSUS DE BALLORE (vicomte Robert DE), professeur à la Faculté libre des Sciences, boulevard Bigot-Dancé, 15, à Lille (Nord).
1911. MOORE (CH.-N.), professeur assistant à l'Université de Cincinnati (États-Unis).
1909. NEOVIUS, ancien professeur à l'Université d'Helsingfors, Chr. Vinthersvei 31, à Copenhague (Danemark).
1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1897. NICOLLIER, professeur, la Chataigneraie, à Saint-Clarens (Vaud, Suisse).
1900. NIEWENGLOWSKI, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Instruction publique, rue de l'Arbalète, 35, à Paris (5^e).
1882. OCAGNE (M. D'), ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique et à l'École des Ponts et Chaussées, rue La Boétie, 30, à Paris (8^e). S. P.
1905. OUVET, 49, rue d'Arras, à Douai.
1873. OVIDIO (E. D'), sénateur, professeur à l'Université, via Lagrange, 2, à Turin (Italie).
1901. PADÉ (H.), recteur de l'Académie de Besançon.
1893. PAINLEVÉ, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue Séguier, 18, à Paris (6^e).
1912. PANGE (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue François I^{er}, 32, à Paris (8^e).
1888. PAPELIER, professeur au lycée, rue Notre-Dame-de-Reouvrance, 29, à Orléans.
1881. PELLET, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Gergovia, 77, à Clermont-Ferrand.
1914. PÈRES, agrégé de l'Université, professeur au lycée de Montpellier.
1881. PETROTT (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis). S. P.
1892. PERRIN (Élie), professeur de mathématiques, rue de la Convention, 116, à Paris (15^e).
1896. PETROVITCH, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 26, à Belgrade (Serbie).
1902. PETROVITCH (S.), général major, professeur ordinaire à l'Académie d'artillerie Michel, Sergeyskaïa, 42, log. 10, à Saint-Petersbourg.
1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, piazza San Marcellino, 2, à Naples (Italie).
1905. PFEIFFER, maître de conférences à l'Université, Szaoudi Wladimirskaïa 45, log. II, à Kiew (Russie).

Date
de
l'admission.

1906. PHILIPPE (Léon), inspecteur général des ponts et chaussées, rue de Turin, 23 bis, à Paris (8°).
1879. PICARD (Émile), membre de l'Institut, membre du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Joseph-Bara, 4, à Paris (6°).
1872. PICQUET, chef de bataillon du génie en retraite, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6°).
1913. PODTIAGUINE (N.), rue Stanislas, 14, à Paris (6°).
1906. POPOVICI, professeur à la Faculté des Sciences de Jassy (Roumanie).
1894. POTRON (M.), docteur ès sciences, professeur aux Facultés catholiques de l'Ouest, rue Rabelais, 46, à Angers (Maine-et-Loire).
1914. POWALO-SCHWEIKOWSKI, licencié ès sciences, rue Gazan, 5 bis, à Paris (14°).
1902. PUX (Victor), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue Madame, 54, à Paris (6°).
1896. QUIQUET, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, boulevard Saint-Germain, 92, à Paris (5°).
1903. RÉMOUNDOS, professeur d'analyse supérieure à la Faculté des Sciences, rue Spyridion Tricoupis, 54, à Athènes (Grèce).
1903. RICHARD, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, rue de Fonds, 100, à Châteauroux.
1908. RICHARD D'ABONCOURT (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Nationale, 74, à Lille.
1908. RISSER, actuaire au Ministère du Travail, rue Sédillot, 5, à Paris (7°).
1903. ROCHE, agrégé de l'Université, docteur ès sciences, rue d'Assas, 76, à Paris (6°).
1896. ROUGIER, professeur au Lycée et à l'École des ingénieurs, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.
1906. ROUSIERS, professeur au collège Stanislas, boulevard du Montparnasse, 62, à Paris (14°).
1911. RUDNICKI, licencié ès sciences, avenue Reille, 28, à Paris (14°).
1900. SALTYKOW, professeur à l'Université, à Kharkow (Russie). S. P.
1872. SARTIAUX, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. SAUVAGE, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.
1897. SCHOU (Erik), ingénieur, Hollaendervej, 12, à Copenhague (Danemark).
1901. SEE (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).
1896. SÉGUIER (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue du Bac, 114, à Paris (7°).
1882. SÉLIVANOFF (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg. S. P.
1900. SERVANT, chargé de conférences à la Sorbonne, à Bourg-la-Reine (Seine).
1908. SHAW (J.-B.), professeur à l'Université, West California, 901, Ave Urbana (Illinois, États-Unis).
1912. SIRE, maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Rennes.
1916. SOULA, agrégé de l'Université, 40^e d'infanterie. S. P. 130.
1900. SPARRE (comte DE), doyen de la Faculté catholique des Sciences, avenue de la Bibliothèque, 7, à Lyon. S. P.
1909. SPEISER (Andreas), membre de la Société mathématique suisse, privat-docent à l'Université, Stephansplan, 7, à Strasbourg (Allemagne).
1912. STECKER (H.-F.), professeur de mathématiques, à Pensylvania State College, Miles St. 306 (Pensylvanie, États-Unis).
1879. STEPHANOS, professeur à l'Université, rue Solon, 20, à Athènes (Grèce).

Date
de
l'admission.

1898. STÖRNER, professeur à l'Université, Cort Adelers gade, 12, à Christiania (Norvège).
1904. SUDRIA, directeur de l'École préparatoire à l'École supérieure d'Électricité, rue de Staël, 26, à Paris (14°).
1904. SUNDMAN, maître de conférences à l'Université, Fredriksgatan, 19, à Helsingfors (Finlande).
1872. SYLOW, professeur à l'Université, Majorstuveien, 16 III, à Christiania (Norvège). S. P.
1913. TAMARKINE, répétiteur à l'École impériale des Ponts et Chaussées, rue Liteinaia, 45, App. 33, à Saint-Petersbourg (Russie).
1899. THYBAUT, professeur au lycée Henri IV, boulevard St-Germain, 50, à Paris (5°).
1910. TIMOCHENKO, professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1913. TINO (O.), via Lagrange, 2, à Turin (Italie).
1912. TOUCHARD, ingénieur des Arts et Manufactures, boulevard Haussmann, 150, à Paris (8°).
1910. TRAYNARD, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.
1872. TRESCA, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du Général-Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1896. TRESSE, professeur au collège Rollin, rue Mizon, 6, à Paris (15°).
1907. TRIPIER (H.), licencié ès sciences, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17°).
1911. TURRIÈRE, docteur ès sciences, professeur au lycée de Montpellier.
1913. VALIROV, docteur ès sciences, professeur au lycée du Parc, à Lyon (Rhône).
1893. VALLÉE-POUSSIN (Ch.-J. de la), membre de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, professeur à l'Université de Louvain (Belgique), avenue Dorian, 2, à Paris (11°).
1904. VANDEREN, professeur à l'École militaire, avenue Macan, 16, à Bruxelles.
1905. VAN VLECK, professeur de mathématiques, University of Wisconsin, à Madison (Wisconsin, États-Unis).
1897. VASSILAS-VITALIS (J.), professeur à l'École militaire supérieure, rue Epicure, 13, à Athènes (Grèce).
1898. VASSILIEF, membre du Conseil d'État, Vassili Ostrow ligne 12, m. 19, à Saint-Petersbourg (Russie).
1913. VEBLEN (O.), professeur à l'Université de Princeton (États-Unis).
1901. VESSIOT, professeur à la Faculté des Sciences, avenue du Petit-Chambord, 44, à Bourg-la-Reine (Seine).
1911. VILLAT, maître de conférences à l'Université de Montpellier.
1888. VOLTERRA (Vito), professeur à l'Université, via in Lucina, 17, à Rome.
1900. VUIBERT, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5°).
1880. WALCKENAER, inspecteur général en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7°).
1879. WEILL, directeur honoraire du collège Chaptal, boulevard Delessert, 23, à Paris (16°).
1906. WILSON (E.-B.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1911. WINTER, avenue d'Iéna, 66, à Paris (16°).
1909. WOODS (F.-S.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1878. WORMS DE ROMILLY, inspecteur général des mines, en retraite, rue du Général-Langlois, 5, à Paris (16°).
1912. YOUNG (W.-H.), membre de la Société Royale de Londres, professeur à l'Université de Liverpool, villa Rollinde, Épinettes, 22, à Lausanne (Suisse).

Date
de
l'admission.

1882. ZABOUDSKI, membre du Comité d'Artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie
Znamenskaïa, 22, à Saint-Petersbourg (Russie).
1903. ZERVOS, professeur agrégé à l'Université, rue Sozopolcos, 88, à Athènes (Grèce).
1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Forchhammers Vej. 12, à Copenhague (Danemark).
1898. ZIWET, professeur de mathématiques à l'Université de Michigan, South Ingalls
street, 644, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1909. ZORETTI, professeur de mécanique à la Faculté des Sciences de Caen.

Membres décédés en 1915 : MM. AUTONNE, BERGER, GUYOU, HALPHEN.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS DÉCÉDÉS.

BENOIST. — BIENAYMÉ. — BISCHOFFSHEIM. — BORCHARDT. — BOURLET. — CANET.
CHASLES. — CLAUDE-LAFONTAINE. — GAUTHIER-VILLARS. — HALPHEN. — HERMITE.
HIRST. — LAFON DE LADÉBAT. — MANNHEIM. — PERRIN (R.). — POINCARÉ. — DE
POLIGNAC. — RAFFY. — TANNERY (PAUL). — TCHERICHEF. — VIELLARD.

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.	
1873	CHASLES.
1874	LAFON DE LADÉBAT.
1875	BIENAYMÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.
1877	MANNHEIM.
1878	DARBOUX.
1879	O. RONNET.
1880	JORDAN.
1881	LAGUERRE.
1882	HALPHEN.
1883	BOUCHÉ.
1884	PICARD.
1885	APPELL.
1886	POINCARÉ.
1887	FOURET.
1888	LAISANT.
1889	ANDRÉ (D.).
1890	HATON DE LA GOUPIILLIÈRE.
1891	COLLIGNON.
1892	VICAIRE.
1893	HUMBERT.
1894	PICQUET.

MM.	
1895	GOUSAT.
1896	KÉNIGS.
1897	PICARD.
1898	LECORNU.
1899	GUYOU.
1900	POINCARÉ.
1901	D'OCAGNE.
1902	RAFFY.
1903	PAINLEVÉ.
1904	CARVALLO.
1905	BOREL.
1906	HADAMARD.
1907	BLUTEL.
1908	PERRIN (R.).
1909	BIOCHE.
1910	BRICARD.
1911	LÉVY (L.).
1912	ANDOYER.
1913	COSSERAT (F.).
1914	VESSIOT.
1915	CARTAN.
1916	FOUCHÉ.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques.</i>	Pays-Bas.
Bâle.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics.</i>	États-Unis.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik.</i>	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Calcutta.....	Calcutta mathematical Society.	Inde anglaise.
Cambridge.....	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.</i>	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.</i>	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik.</i>	Danemark.
Copenhague.....	<i>Det Kongelige danske videnskabernes selskabs Skrifter.</i>	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Académie technique.	Pays-Bas.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis.</i>	Belgique.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax.....	Nova Scotian Institute of Science.	N ^{lle} -Écosse (Canada)
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas.....	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkow.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkow.....	Société mathématique de Kharkow.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen.</i>	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Archiv der Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Liège.....	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne.....	<i>Periodico di Matematica.</i>	Italie.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.

Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut grand ducal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica <i>Antonio Alzate.</i>	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académiedes Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York.....	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa.....	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme.....	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Paris.....	<i>Intermédiaire des Mathématiciens.</i>	France.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.....	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Bohême.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pestování matematiky a fysiky.</i>	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Bohême.	Autriche.
Princeton.....	<i>Annals of Mathematics.</i>	New-Jersey, États-Unis.
Rennes.....	<i>Travaux de l'Université.</i>	France.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincci.</i>	Italie.
Rome.....	Società italiana delle Scienze.	Italie.
Rome.....	Società per il progresso delle Scienze.	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Sophia.....	<i>Annuaire de l'Université de Sophia.</i>	Bulgarie.
Stockholm.....	<i>Acta mathematica.</i>	Suède.
Stockholm.....	<i>Archiv for Mathematik.</i>	Suède.
Stockholm.....	<i>Bibliotheca mathematica.</i>	Suède.
Tokyo.....	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences.</i>	France.
Turin.....	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Varsovie.....	Prace Matematyczne Fizyczne.	Russie.
Venise.....	Institut Royal des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik.</i>	Autriche.
Washington.....	National Academy of Sciences.	États-Unis.
Zagreb (Agram)...	Académie Sud-Slave des Sciences et Beaux-Arts	Autriche-Hongrie.
Zurich.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

Charles HALPHEN.

Charles Halphen, le regretté vice-secrétaire de la Société mathématique, était né le 3 septembre 1885; entré à l'École Centrale l'un des premiers, en 1903, il fut, à sa sortie, attaché comme ingénieur à la Compagnie P.-L.-M. où il participa à la construction du chemin de fer de Moutiers à Bourg-Saint-Maurice; mais ses goûts le portaient vers la science pure; il avait, d'ailleurs, de qui tenir, étant fils de Georges Halphen, le grand géomètre, qui fut membre de l'Institut et présida, en 1882, la Société mathématique.

Nommé professeur de Géométrie descriptive au collège Chaptal en 1912, Charles Halphen, par son enseignement original et très goûté des élèves, promettait de devenir un professeur éminent; quelques Notes élégantes parues dans les *Nouvelles Annales* et dans le *Bulletin de la Société mathématique* présageaient un géomètre de talent.

Sous-lieutenant de réserve d'artillerie, la mobilisation le surprit en Islande où il faisait une seconde exploration dans une des régions les plus sauvages et les moins connues de l'île, car il aimait le danger et l'aventure; ardent patriote, il se rendit à son poste de combat par les voies les plus rapides, sans prendre le temps d'aller embrasser sa mère pendant une halte de quelques heures à Paris; toujours en première ligne, il fit vaillamment son devoir et tomba glorieusement le 15 mai 1915 à Neuville-Saint-Vaast.

Cité à l'ordre du jour de l'armée, voici en quels termes le commandant du régiment signala sa fin héroïque :

« Le lieutenant-colonel a la douleur de porter à la connaissance du régiment la mort du lieutenant Charles Halphen, tué, le 15 mai, au combat de Neuville-Saint-Vaast. Il dirigeait, depuis le début de notre offensive, l'action des canons de tranchées. Il a porté à l'ennemi de rudes coups. D'une incomparable bravoure, il avait communiqué à ses hommes l'ardeur qui l'animait; il faisait l'admiration de tous : chefs, subordonnés et camarades garderont de lui le souvenir d'un noble caractère et son exemple ne sera pas perdu. »

WEILL.

Jean CLAIRIN.

Jean Clairin, né à Nîmes le 13 novembre 1876, entra en 1896 à l'École Normale. Reçu le premier à l'agrégation de Mathématiques en 1899, docteur ès sciences en 1902, il débuta dans l'Université comme professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Dijon. En 1903, il était maître de conférences, en 1907, professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

Le premier travail de Clairin, qui lui a servi de Thèse de Doctorat, est relatif à un sujet encore tout récent à ce moment-là, et dont l'importance avait surtout été mise en lumière dans les *Leçons sur la Géométrie* de Darboux. L'étude des surfaces à courbure constante, et de certaines transformations de ces surfaces, avait conduit à définir certaines correspondances entre deux éléments de contact de l'espace qui, lorsque des conditions d'une forme particulière sont réalisées, font correspondre les intégrales de deux équations aux dérivées partielles du second ordre. On avait surtout jusque-là étudié quelques cas particuliers intéressants. Prenant cette question à un point de vue plus général, Clairin a montré que ces transformations se classent naturellement en trois grandes catégories, classification rationnelle qui est aujourd'hui adoptée, et étudié tout particulièrement les transformations B_1 , qui offrent la plus grande analogie avec la célèbre transformation de Laplace. L'étude de ces diverses transformations soulève un grand nombre de questions qui touchent à plusieurs points de la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre. Les travaux de Clairin ont porté sur bien des points de ce vaste domaine et ont pour but : soit de développer ses premières recherches, soit de compléter des résultats déjà démontrés par d'autres. Je dois citer en particulier une Note, qui avait vivement attiré l'attention de Darboux, sur l'impossibilité de trouver de nouveaux cas d'intégrabilité de l'équation $s = f(x, y, z)$, question que Sophus Lie avait déjà abordée sans la résoudre complètement. Tous les écrits de Clairin ont un caractère d'élégance et de précision, preuve du soin qu'il mettait à la rédaction, ne négligeant aucun détail; c'était aussi, m'a-t-on dit, la marque de son enseignement.

On était en droit d'attendre encore beaucoup de lui, et ses dernières Notes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* faisaient prévoir toute une suite d'importants résultats.

A la mobilisation, Clairin fut incorporé comme adjudant à la 11^e compagnie du 24^e territorial. Le 26 août 1914, ce régiment rencontra à Thun-l'Évêque des forces ennemies considérables et Clairin disparut. Une année d'angoisses, d'espoirs sans cesse renaissants et toujours déçus commença alors pour les siens. La certitude est venue : dès le début de la bataille, Jean Clairin avait été tué d'une balle au front. La guerre a détruit en lui une belle intelligence, une conscience droite, un cœur excellent.

ED. GOURSAT.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 12 JANVIER 1916.

PRÉSIDENCE DE M. CARTAN.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement de son Bureau et d'une partie du Conseil.

Communication :

M. Fontené : *Sur une extension des polygones de Poncelet.*

M. Darboux a retrouvé récemment (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, janvier 1916) la chaîne de $2n$ coniques que l'auteur a fait connaître en 1897 (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^e série, t. XVI) pour l'extension de la théorie des polygones de Poncelet, chacun des sommets du polygone décrivant une conique distincte, en même temps que chacun des côtés roule sur une conique distincte. La méthode suivie par l'auteur, outre qu'elle est élémentaire, a l'avantage d'étudier en elle-même une chaîne intéressante de $2n$ coniques, à laquelle on applique ensuite *la condition unique de fermeture*. Dans l'exposé succinct qui suit, l'auteur établit d'une manière complète l'existence de la chaîne de coniques indépendamment de la condition de fermeture; une difficulté subsiste, relativement à la possibilité de réaliser cette condition : l'auteur indique seulement comment il lui paraissait possible de résoudre cette difficulté.

La solution de M. Darboux, fondée sur l'emploi des fonctions elliptiques, est assurément rigoureuse. Mais elle ne permet pas d'organiser d'abord la chaîne de coniques indépendamment de la condition de fermeture, pour introduire ensuite cette condition; elle exprime les éléments du problème, condition de fermeture comprise, en fonction de $2n + 1$ constantes qui doivent satisfaire à trois conditions (on dispose d'ailleurs de deux paramètres supplémentaires, auxquels on a donné pour simplifier la valeur 1).

La méthode employée ici donne les deux cas de fermeture du triangle, qui ne se sont pas offerts dans l'analyse de M. Darboux.

1. Dans une correspondance doublement quadratique $f(x, y) = 0$, il existe quatre valeurs de x donnant pour y deux valeurs égales : je les appelle *valeurs critiques* de x ; il existe de même quatre valeurs critiques de y ; ces deux systèmes de valeurs critiques sont équi-anharmoniques. La relation $f = 0$, qui dépend de huit paramètres, est déterminée par ses éléments critiques et par une dernière donnée.

THÉOREME. — *Deux correspondances doublement quadratiques*

$$f_{12}(x, y) = 0, \quad f_{23}(y, z) = 0$$

donnent entre x et z une correspondance qui se décompose en deux correspondances doublement quadratiques

$$f'_{13}(x, z) = 0, \quad f''_{13}(x, z) = 0,$$

si les quatre valeurs critiques de la variable commune y sont les mêmes dans les deux correspondances données. Les valeurs de x ou de z qui étaient primitivement critiques pour y sont encore les valeurs critiques de ces variables dans chacune des deux correspondances résultantes.

Il suffit d'écrire

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0, \quad A'z^2 + 2B'z + C' = 0,$$

$A, B, \dots$ étant des polynômes du second degré en y ; l'hypothèse permet d'écrire

$$AC - B^2 = A'C' - B'^2 = \Delta,$$

et l'on a

$$(Ax + B)^2 + \Delta = 0, \quad (A'z + B')^2 + \Delta = 0;$$

on en déduit, par une même valeur de y ,

$$Ax + B \pm (A'z + B') = 0,$$

et l'on achève facilement. Si l'on prend par exemple la relation $f' = 0$, une valeur de x donne deux valeurs de y dont chacune fournit une seule valeur de z .

L'extension au cas de N variables est immédiate; on part des $N - 1$ relations doublement quadratiques

$$\begin{aligned} f_{12}(x, y) &= 0, & f_{23}(y, z) &= 0, \\ f_{34}(z, t) &= 0, & \dots, & f_{N-1,N}(v, w) = 0, \end{aligned}$$

la variable commune à deux relations consécutives ayant les mêmes valeurs critiques dans ces deux relations, et la relation entre x et w se décompose en relations doublement quadratiques

$$f'_{1N}(x, w) = 0, \quad f''_{1N}(x, w) = 0, \quad \dots,$$

en nombre 2^{N-2} ; dans chacune de ces deux relations, les x et les w critiques sont les anciens x et les anciens w critiques.

COROLLAIRE. — *Étant données entre N variables les N relations doublement quadratiques*

$$\begin{aligned} f_{12}(x, y) = 0, \quad f_{23}(y, z) = 0, \quad \dots, \\ f_{N-1,N}(v, w) = 0, \quad f_N(w, x) = 0, \end{aligned}$$

si la variable commune à deux quelconques de ces relations, y compris la dernière et la première, a les mêmes valeurs critiques dans ces deux relations, ce qui forme $4N-1$ conditions, il faut encore une condition et une seule pour que ces relations admettent une infinité de solutions.

Cette condition peut être appelée *condition de fermeture*.

En effet, la relation donnée $f_N(w, x) = 0$ doit être identique à l'une des relations en nombre 2^{N-2} indiquées ci-dessus; comme la relation donnée et celle avec laquelle on veut l'identifier ont les mêmes valeurs critiques, il y a une seule condition d'identification.

Si l'on se donne x , on a à choisir entre deux valeurs de y , et ce choix détermine complètement les valeurs des autres variables.

2. Les relations doublement quadratiques dont j'aurai à faire usage sont symétriques par rapport aux deux variables. Une telle relation dépend de cinq paramètres; en disposant des trois paramètres de la substitution

$$x = \frac{aX + b}{cX + d}, \quad y = \frac{aY + b}{cY + d},$$

et en remplaçant ensuite X et Y par $\tan \frac{x}{2}$ et $\tan \frac{y}{2}$, on peut lui donner la forme canonique

$$\frac{\cos \theta}{\cos \varphi} \cos x \cos y + \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} \sin x \sin y = 1;$$

pour les valeurs

$$x = \varphi, \quad -\varphi, \quad \pi - \varphi, \quad \pi + \varphi,$$

on obtient pour y une valeur double

$$y = \theta, \quad -\theta, \quad \pi - \theta, \quad \pi + \theta,$$

de sorte que les valeurs critiques de X et de Y sont

$$\tan \frac{\varphi}{2}, \quad -\tan \frac{\varphi}{2}, \quad \cot \frac{\varphi}{2}, \quad -\cot \frac{\varphi}{2}.$$

THÉOREME. — *Les deux relations*

$$(1) \quad \frac{\cos \theta_{12}}{\cos \varphi} \cos x \cos y + \dots = 1,$$

$$(2) \quad \frac{\cos \theta_{23}}{\cos \varphi} \cos y \cos z + \dots = 1,$$

qui ont les mêmes angles critiques, donnent entre x et z une relation qui se décompose en deux relations de même forme

$$(3) \quad \frac{\cos \theta_{13}}{\cos \varphi} \cos x \cos z + \dots = 1;$$

pour déterminer θ_{13} , on fait dans (1) et (2)

$$y = \varphi, \quad x = \theta_{12}, \quad z = \theta_{23},$$

et l'on a dans (3)

$$(F) \quad \frac{\cos \theta_{12} \cos \theta_{23} \cos \theta_{13}}{\cos \varphi} + \dots = 1;$$

cette relation donne deux valeurs pour θ_{13} .

On peut s'assurer que l'élimination de y entre (1) et (2), et l'élimination de θ_{13} entre (3) et (4) donnent le même résultat. On remarquera que les six angles $x, y, z, \theta_{23}, \theta_{31}, \theta_{12}$ jouent des rôles analogues, de la même façon que les sommets d'un quadrilatère complet.

L'extension au cas de N angles est immédiate.

COROLLAIRE. — *Les N relations*

$$(1) \quad \frac{\cos \theta_{12}}{\cos \varphi} \cos x \cos y + \dots = 1,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$(N) \quad \frac{\cos \theta_{N1}}{\cos \varphi} \cos w \cos x + \dots = 1,$$

admettent une infinité de solutions sous une condition unique de fermeture.

Cette condition est que ϑ_{N1} soit l'une des valeurs, en nombre 2^{N-2} , qui figurent dans le résultat de l'élimination de $y, \dots, v$ entre les $N - 1$ premières relations.

3. On déduit de là ce théorème :

Soit une chaîne de $2n$ coniques

$$S'_1, S_2, S'_3, S_4, \dots, S_{2n},$$

conjuguées à un même triangle, chaque conique d'indice pair S (y compris la dernière) touchant les quatre tangentes communes aux deux coniques voisines S' , chaque conique d'indice impair S' (y compris la première) passant aux quatre points communs aux deux coniques voisines S (ce qui fait seulement $2n - 1$ conditions) : il faut une condition pour qu'il existe un contour polygonal mobile de n côtés dont les sommets $A'_1, A'_3, \dots$ soient sur les coniques S' , et dont les côtés $a_2, a_4, \dots$ soient tangents aux coniques S .

Si l'on se donne le sommet A'_1 , on a le choix entre les deux tangentes a_2 que l'on peut mener de ce point à la conique S_2 , et ce choix détermine entièrement le reste du contour.

Tout d'abord, étant données deux coniques S et S' , courbes unicursales, la correspondance algébrique établie entre une tangente a à la conique S et un point A' de la conique S' par la condition que le point A' soit sur la droite a , ou que la droite a passe par le point A' , est une correspondance doublement quadratique; les positions critiques de a , celles qui donnent deux points A' confondus, sont les tangentes communes aux deux courbes, et les positions critiques de A' , celles qui donnent deux droites a confondues, sont les points communs aux deux courbes. Considérons alors trois coniques S'_1, S_2, S'_3 inscrites à un même quadrilatère : une tangente a_2 à la conique S_2 rencontre S'_1 aux deux points $+A'_1$ et $-A'_1$ et rencontre S'_3 aux deux points $+A'_3$ et $-A'_3$; la correspondance entre A'_1 et A'_3 se décompose en deux correspondances doublement quadratiques, dont l'une associe les points de même signe, et le passage du couple $+A'_1, +A'_3$ au couple $-A'_1, +A'_3$ se fait par une tangente commune, à l'instant où, les deux points A'_1 se confondant sur S'_1 , les deux points A'_3 se confondent également sur S'_3 . Et l'on comprend ainsi pourquoi, dans le théorème donné au début, les valeurs critiques de la variable commune y doivent être les mêmes pour que la relation entre x et z se décompose. Pour trois coniques S_2, S'_3, S_4 , circonscrites à un même quadrangle, on a des faits corrélatifs. La chaîne de $2n$ coniques ayant la structure indiquée, on est

bien dans les conditions du corollaire ci-dessus : les trois coniques S'_1, S_2, S'_3 étant inscrites à un même quadrilatère, les positions critiques de a_2 sont les mêmes pour A'_1 et A'_3 ; les trois coniques S_2, S'_3, S_4 étant circonscrites à un même quadrangle, les positions critiques de A'_3 sont les mêmes pour a_2 et a_4 ; et ainsi de suite.

Le triangle autopolaire commun étant donné, les $2n$ coniques, simplement conjuguées par rapport à ce triangle, dépendraient de $4n$ paramètres; la condition de fermeture mise à part, je dis que les $2n$ conditions apparentes auxquelles elles sont soumises se réduisent à $2n - 1$, et qu'elles dépendent par suite de $2n + 1$ paramètres. Les deux premières coniques S'_1 et S_2 étant simplement conjuguées par rapport au triangle, la conique S'_3 du faisceau tangentiel déterminée par ces deux coniques dépend d'un paramètre; la conique S_4 du faisceau ponctuel déterminé par S_2 et S'_3 dépend alors d'un paramètre; on continue ainsi jusqu'à la conique S_{2n-2} . On cherche alors deux coniques S'_{2n-1} et S_{2n} vérifiant les conditions suivantes : dans la suite

$$S'_{2n-3}, S_{2n-2}, S'_{2n-2}, S_{2n}, S'_1, S_2,$$

où les deux coniques du milieu sont à déterminer, la conique S'_{2n-1} doit toucher les tangentes communes aux deux précédentes, la conique S_{2n} doit passer par les points communs aux deux suivantes, et, de plus, le faisceau ponctuel déterminé par S'_{2n-1} et S_{2n} doit contenir S_{2n-2} , le faisceau tangentiel déterminé par ces deux mêmes coniques doit contenir S'_1 . Ces quatre conditions sont-elles compatibles, et se réduisent-elles à trois, portant ainsi le nombre des conditions à $(2n - 4) + 3$ ou $2n - 1$? En d'autres termes, peut-on se donner encore la conique S'_{2n-1} avec un paramètre, et, cela fait, les trois conditions apparentes imposées à S_{2n} se réduisent-elles à deux conditions, et à deux conditions compatibles?

Le triangle autopolaire commun étant pris comme triangle de référence, et la condition pour que le point (x, y, z) soit sur la droite (u, v, w) étant

$$ux + vy - wz = 0,$$

soient les équations (ponctuelles ou tangentielles) des $2n$ coniques qui doivent former la chaîne demandée :

$$(S'_1) \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - z^2 = 0,$$

$$(S_2) \quad \frac{u^2}{a_2^2} + \frac{v^2}{b_2^2} - w^2 = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(S'_4) \quad \frac{u^2}{a_N^2} + \frac{v^2}{b_N^2} - w^2 = 0,$$

avec $N = 2n$; on posera

$$\begin{aligned} \frac{x'_1}{z_1} &= a_1 \cos \alpha_1, & \frac{y'_1}{z_1} &= b_1 \sin \alpha_1, \\ \frac{u_2}{w_2} &= a_2 \cos \alpha_2, & \frac{v_2}{w_2} &= b_2 \sin \alpha_2, \\ &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Les deux premières coniques étant prises à volonté dans le système des coniques conjuguées par rapport au triangle, la condition qui exprime que le point A'_1 est sur la tangente a_2 est

$$a_1 a_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + b_1 b_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = 1,$$

et l'on peut lui donner la forme

$$(1) \quad \frac{\cos \theta_{12}}{\cos \varphi} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \frac{\sin \theta_{12}}{\sin \varphi} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = 1,$$

en déterminant l'angle φ par la relation

$$(a_1 a_2)^2 \cos^2 \varphi + (b_1 b_2)^2 \sin^2 \varphi = 1,$$

qui assure l'existence de θ_{12} :

$$\frac{\sin \theta_{12}}{\sin \varphi} = b_1 b_2, \quad \frac{\cos \theta_{12}}{\cos \varphi} = a_1 a_2, \quad \frac{\tan \theta_{12}}{\tan \varphi} = \frac{b_1}{a_1} \times \frac{b_2}{a_2}.$$

Pour les coniques S_2 et S'_3 on aura de même

$$(2) \quad \frac{\cos \theta_{23}}{\cos \varphi} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \dots = 1,$$

avec la mêmes valeurs de φ puisque les coniques S'_1, S_2, S'_3 font partie d'un même faisceau tangentiel, et l'on continuera ainsi jusqu'aux deux coniques S'_{N-3}, S_{N-2} , pour lesquelles on aura

$$(N-3) \quad \frac{\cos \theta_{N-3, N-2}}{\cos \varphi} \cos \alpha_{N-3} \cos \alpha_{N-2} + \dots = 1.$$

En considérant les coniques S_{N-2} et S'_{N-1} , S'_{N-1} et S_N , S_N et S'_1 , on aura pour déterminer les coefficients des équations de ces coniques les trois équations :

$$\begin{aligned} (a_{N-2} a_{N-1})^2 \cos^2 \varphi + (b_{N-2} b_{N-1})^2 \sin^2 \varphi &= 1, \\ (a_{N-1} a_N)^2 \cos^2 \varphi + \dots\dots\dots &= 1, \\ (a_N a_1)^2 \cos^2 \varphi + \dots\dots\dots &= 1; \end{aligned}$$

il arrivera alors que la conique S'_1 fera partie du faisceau ponctuel déterminé par S_N et S_2 , puisque les φ critiques ont été maintenus le long du cycle.

On pourra prendre à volonté a_{N-1} , calculer b_{N-1} au moyen de la première relation, et obtenir ensuite a_N et b_N , pourvu qu'on ait

$$\frac{a_{N-1}}{a_1} = \frac{b_{N-1}}{b_1} \quad \text{ou} \quad \frac{b_{N-1}}{a_{N-1}} \neq \frac{b_1}{a_1};$$

or la première des relations ci-dessus ne détermine pas le rapport $\frac{b_{N-1}}{a_{N-1}}$. Ainsi, pour organiser la chaîne de $2n$ coniques indépendamment de la condition de fermeture, après s'être donné le triangle autopolaire commun, on prend les deux coniques S'_1 et S_2 simplement conjuguées par rapport à ce triangle, les coniques suivantes, sauf la dernière, dépendent chacune d'un paramètre (faisant simplement partie d'un faisceau tangentiel ou d'un faisceau ponctuel); la dernière conique S_N est alors déterminée et existe réellement. Le système dépend de $2n + 1$ paramètres, sans compter les six paramètres du triangle.

Le maintien des φ critiques le long du cycle aurait suffi à montrer que les $2n$ conditions apparentes imposées aux coniques se réduisent à $2n - 1$; il fallait insister et montrer que ces $2n - 1$ conditions peuvent être réalisées.

En ce qui concerne la condition de fermeture du polygone, il faudra que l'angle $\theta_{N,1}$ ait l'une des valeurs, en nombre 2^{N-2} , qui figurent dans les relations

$$\frac{\cos \theta_{1,N}}{\cos \varphi} \cos \alpha_1 \cos \alpha_N + \dots = 1,$$

résultant de l'élimination de $\alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}$ entre les $N - 1$ relations qui lient α_1 et $\alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}$ et α_N . La question de savoir si l'on peut vraiment disposer de a_{N-1} pour que cette condition unique soit réalisée soulève une difficulté que l'on pourrait peut-être tourner en montrant que, pour un choix convenable de la conique S'_{N-1} , l'enveloppe de la droite $A'_{N-1}A_1$ est une conique S_N . Pour organiser la chaîne de $2n$ coniques en tenant compte de la condition de fermeture, après s'être donné le triangle autopolaire commun, on prend les deux coniques S'_1 et S_2 simplement conjuguées par rapport à ce triangle, les coniques suivantes, sauf les deux dernières, dépendent chacune d'un paramètre, et les deux dernières coniques sont alors déterminées; le système dépend de $2n$ paramètres, sans compter les six paramètres du triangle.

4. Si $F(u, v, w)$ est la forme adjointe de la forme quadratique $f(x, y, z)$, on a l'identité

$$F(yz' - zy', zx' - xz', -) = f(x, x) f(x', x') - f^2(x, x'),$$

$f(x, x')$ étant la forme linéaire $a_{11}xx' + \dots$ déduite de la forme quadratique $f(x, x)$; si le point M est sur la conique $f = 0$, on a pour F un carré parfait :

$$F(yz' - zy', \dots) = -f^2(x, x').$$

Si S'_1, S_2, S'_3 sont trois coniques inscrites à un même quadrilatère, leurs équations tangentielles sont

$$F_1(u, v, w) = 0, \quad F_1 - k^2 F_3 = 0, \quad F_3(u, v, w) = 0;$$

en écrivant que la droite joignant un point de S'_1 à un point de S'_3 est tangente à S_2 , on a

$$F_1(y_1 z_3 - z_1 y_3, \dots) - k^2 F_3(y_1 z_3 - z_1 y_3, \dots) = 0,$$

ou

$$f_1^2(x_1, x_3) - k^2 f_3^2(x_1, x_3) = 0,$$

ou

$$f_1(x_1, x_3) \pm k f_3(x_1, x_3) = 0.$$

On vérifie ainsi le fait de décomposition signalé au début du n° 3.

Cela permet en outre de substituer aux $2n$ relations doublement quadratiques entre les éléments $\Lambda'_1, a_2, \Lambda'_3, \dots, a_{2n}, \Lambda'_1$, un système de n relations doublement quadratiques entre les seuls éléments $\Lambda'_1, \Lambda'_3, \dots, \Lambda'_{2n-1}, \Lambda'_1$.

Dans le cas du triangle, si l'on observe qu'un triangle peut devenir évanouissant soit, d'une part, si les côtés sont trois droites concourantes ou si les sommets sont trois points en ligne droite, soit, d'autre part, si deux sommets sont confondus ainsi que les côtés opposés (triangle bi-évanouissant), on est mis sur la voie du résultat suivant que j'ai pu établir en procédant comme il vient d'être dit et en appliquant la condition de fermeture

$$\frac{\cos \theta_{12} \cos \theta_{23} \cos \theta_{31}}{\cos \varphi} + \dots = 1.$$

Soit une chaîne de six coniques

$$S'_1, S_2, S'_3, S_4, S'_5, S_6,$$

conjuguées à un même triangle, telles que chaque conique S (y compris la dernière) touche les tangentes communes aux deux

coniques voisines S' et que chaque conique S' (γ compris la première) passe par les points communs aux deux coniques voisines S ; un triangle qui doit avoir ses côtés tangents aux coniques voisines S , et ses sommets sur les coniques S' , est indéterminé dans deux cas :

1° Lorsque les coniques S sont inscrites à un même quadrilatère, auquel cas les coniques S' sont circonscrites à un même quadrangle, les coniques S' étant polaires réciproques des coniques S par rapport à un système de quatre coniques Σ ;

2° Lorsque les quatre tangentes communes à S_2 et S_4 passent respectivement aux quatre points d'intersection de S'_5 et S'_1 , ce qui entraîne des faits analogues pour S_4 , S_6 , S'_1 , S'_3 , pour S_6 , S_2 , S'_3 , S'_5 .

Dans le premier système, les tangentes en A'_1 , A'_3 , A'_5 concourent en un point dont le lieu est une conique Σ' passant par les points communs aux coniques S' , les points de contact des tangentes a_2 , a_4 , a_6 sont sur une même droite dont l'enveloppe est une conique Σ qui touche les tangentes communes aux coniques S . On peut se donner les coniques S'_1 , S'_2 , S'_3 , Σ' , avec quatre points communs (douze paramètres).

Avec la première solution, on a pour les mêmes coniques quatre espèces de triangles mobiles; avec la deuxième solution, on a seulement deux espèces de triangles. Le système de coniques peut satisfaire à la fois aux conditions 1° et aux conditions 2° (11 paramètres); il admet alors un système de triangles qui fait partie à la fois des deux solutions, trois autres systèmes de triangles qui font partie de la première solution, et un dernier système de triangles qui fait partie de la deuxième solution : ces derniers triangles sont conjugués par rapport à une conique fixe.

5. Pour n quelconque, les coniques S'_1 , S'_3 , ..., S'_{2n-1} peuvent être en même temps les coniques S_2 , S_4 , ..., S_{2n} , le côté $A'_1A'_3$ étant tangent en A'_1 à la conique S'_1 , et ainsi de suite. Si l'on considère trois coniques consécutives S'_1 , S'_3 , S'_5 , en un point où S'_3 est coupée par S'_1 , la tangente à S'_3 doit être une tangente à S'_5 , ou encore une tangente commune à S'_3 et à S'_5 doit avoir un point de contact avec S'_3 situé sur S'_1 ; la $n^{\text{ième}}$ condition est une conséquence des $n-1$ premières. Il y a une condition de fermeture.

Pour $n=3$, on se donne S'_1 et S'_3 ; la conique S'_5 doit toucher les tangentes à S'_3 aux points où elle est coupée par S'_1 , et passer aux points de contact avec S'_1 des tangentes communes à S'_1 et à S'_3 ; il existe deux coniques remplissant ces conditions; *il n'y a pas de condition supplémentaire de fermeture*. Pour $n=4$, la fermeture est

impossible dans les conditions où l'on s'est placé (relations doublement quadratiques non décomposables et de genre 1).

REMARQUE. — La condition indiquée au début pour la décomposition de la relation entre x et z est nécessaire si, dans l'une des deux relations données, les quatre valeurs critiques de l'une des variables sont distinctes (relation de genre 1). Si, dans l'une des deux relations données, deux des valeurs critiques de l'une des variables sont égales, ce qui entraîne l'égalité de deux valeurs critiques de l'autre variable, un fait analogue doit avoir lieu dans l'autre relation, sans que la valeur critique double doive être la même de part et d'autre; les deux autres valeurs critiques de la variable commune, supposées distinctes dans chacune des deux relations, doivent être les mêmes de part et d'autre. L'application au problème des polygones de Poncelet conduirait à considérer le cas où deux coniques consécutives sont tangentes en un point.

Si, dans l'une des relations, les quatre valeurs critiques de l'une des variables étaient égales deux à deux, cette relation se décomposerait en deux relations homographiques; il est bien connu que, pour deux coniques bitangentes S et S' , la correspondance entre une tangente à S est un point de S' , le point devant être sur la tangente, se décompose en deux correspondances homographiques.

(Voir *Nouvelles Annales*, 3^e série, t. 18, p. 442.)

M. Montel : *Sur une définition qualitative des cercles osculateurs et des lignes de courbure.*

L'auteur montre par une voie élémentaire que : 1^o parmi les familles de cercles tangents à une courbe plane, la famille des cercles osculateurs est caractérisée par la propriété que, pour deux cercles voisins, l'un est à l'intérieur de l'autre; 2^o parmi les familles de sphères tangentes à une surface, la famille des sphères osculatrices est caractérisée par la propriété que, pour deux sphères voisines, l'une est à l'intérieur de l'autre.

M. Fouché : *Sur l'homographie.*

SÉANCE DU 23 FÉVRIER 1916.

PRÉSIDENTE DE M. FOUCHÉ.

Communication :

M. Fouché : *Sur l'homographie.*

SÉANCE DU 15 MARS 1916.

PRÉSIDENTE DE M. FOUCHÉ.

Communication :

M. Fontené : *Sur le cercle de Joachimsthal.*

1. On peut se demander à quelle condition un cercle coupe une conique en quatre points dont trois soient les pieds de trois normales concourantes; voici la réponse à cette question :

Si d'un point P on mène à une conique à centre quatre normales $PM_1, PM_2, \dots$, le cercle $M_2M_3M_4$ passe, non seulement par le point m_1 diamétralement opposé au point M_1 , mais aussi par la projection p_1 du centre de la conique sur la tangente en m_1 .

RÉCIPROQUEMENT, si un cercle passe par un point m_1 d'une conique à centre et par la projection p_1 du centre sur sa tangente en m_1 , il coupe encore la conique en trois points M_2, M_3, M_4 tels que les normales en ces points concourent en un point P.

Si l'on veut obtenir les cercles de Joachimsthal qui ont pour centre un point donné C, on prend sur le prolongement de OC le point r pour lequel on a $Or = 2OC$, on mène du point r les normales $rm_1, rm'_1, rm''_1, rm'''_1$, et les cercles cherchés, de centre C, passent respectivement aux points $m_1, m'_1, \dots$

2. En 1884, j'ai donné dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* cette extension à l'espace de théorème de Joachimsthal.

Si d'un point P on mène à une quadrique les six normales dont

les pieds sont $M_1, M_2, \dots, M_6$, les cinq points $M_2, \dots, M_6$ et le point m_1 diamétralement opposé au point M_1 sont sur une infinité de quadriques ayant leurs axes parallèles à ceux de la quadrique donnée; ces six points sont, par suite, sur trois quadriques de révolution dont les axes sont parallèles à ceux de la quadrique donnée.

SÉANCE DU 10 MAI 1916.

PRÉSIDENTE DE M. FOUCHÉ.

Communication :

M. Fouché : *Sur certains cercles des neuf points.*

SÉANCE DU 24 MAI 1916.

PRÉSIDENTE DE M. FOUCHÉ.

Communications :

M. Fouché : *Sur la transformation de Lie.*

M. Cahen : *Sur un théorème d'arithmétique.*

p étant un nombre premier supérieur à 3, la somme des produits k à k (k impair, supérieur à 1) des nombres 1, 2, ..., $(p-1)$ est divisible par p^2 .

SÉANCE DU 28 JUIN 1916.

PRÉSIDENTE DE M. FOUCHÉ.

Élections :

Sont élus à l'unanimité, membres de la Société, M. Elcus, présenté par MM. Borel et Montel, et M. Soula, présenté par MM. Lattès et Montel.

Communications :

M. Kiveliovitchi : *Sur une méthode de résolution de l'équation* $6x^2+1=y^2$.

Il s'agit de résoudre cette équation en nombres entiers par des méthodes élémentaires sans avoir recours à la théorie de Lagrange.

On voit facilement que x doit être pair. Posons

$$x = 2u, \quad y = 5u + v;$$

on trouve

$$u^2 - 10uv + v^2 - 1 = 0;$$

en résolvant par rapport à u , on a

$$u = 5v \pm \sqrt{24v^2 + 1}.$$

On peut prendre le signe + devant le radical (car prendre le signe — revient à changer u en $-u$ et v en $-v$, c'est-à-dire x en $-x$ et y en $-y$). Donc

$$u = 5v + \sqrt{24v^2 + 1},$$

d'où

$$x = 10v + 2\sqrt{24v^2 + 1} \quad y = 24v + 5\sqrt{24v^2 + 1}.$$

Posons

$$2v = w,$$

on trouve

$$x = 5w + 2\sqrt{6w^2 + 1}, \quad y = 12w + 5\sqrt{6w^2 + 1}.$$

Pour que x et y soient entiers, il faut que w soit solution de l'équation primitive.

Disposons les solutions de cette équation par valeurs croissantes :

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_i, y_i), \dots$$

On voit facilement qu'on aura les relations suivantes entre les racines

$$(1) \quad x_{i+1} = 5x_i + 2y_i, \quad y_{i+1} = 12x_i + 5y_i.$$

En prenant pour $x_1 y_1$ la solution banale $x_1 = 0, y_1 = 1$, on obtient par ces relations toutes les solutions entières.

La substitution (1) est une substitution automorphe, comme on pouvait le prévoir par la théorie des formes quadratiques. La même méthode est applicable aux équations $ax^2+1=y^2$ lorsque a est de la forme $4h+2$ et tel que $4a+1$ soit un carré parfait (a pourrait être de la forme $4h+1$, mais $16h+5$ n'est jamais un carré parfait).

On peut appliquer la même méthode au cas où $a + 1$ est un carré parfait t^2 en posant $y = tx - c$.

Des méthodes analogues sont applicables à des cas plus généraux.

M. Fouché : *Sur une solution par récurrence du même problème.*

M. Kostitzin : *Sur la résolution de l'équation $ax^2 + 1 = y^2$.*

SÉANCE DU 8 NOVEMBRE 1916.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, M. Kampé de Férié, présenté par MM. Cha-telet et Denjoy.

Communications :

M. Bioche : *Sur une cubique plane remarquable.*

Édouard Lucas a signalé, en 1876, deux cubiques remarquables dépendant d'un triangle. L'une d'elles est le lieu du point M tel qu'il existe une conique inscrite dans un triangle ABC et dont les normales aux points de contact avec les côtés soient concourantes en M.

Je voudrais rappeler l'attention sur cette cubique, et signaler des propriétés qui semblent n'avoir pas été aperçues par Lucas. La cubique de Lucas peut être obtenue comme le lieu des points M tels que les droites MA, MB, MC soient normales à une conique circonscrite à ABC. Elle admet pour centre le centre du cercle circonscrit à ABC, et pour asymptotes les perpendiculaires menées de ce point aux côtés du triangle. La tangente au centre passe par le point de Lemoine du triangle ABC; ce fait permet de caractériser la cubique en question parmi les cubiques ayant trois asymptotes concourantes et passant par le point de concours. Si l'on se donne trois droites concourantes et un point, il y a une cubique de Lucas admettant ces droites comme asymptotes et passant par ce point.

Étant donné un triangle ABC on peut facilement déterminer 26 points et 10 tangentes, dont les asymptotes et une tangente d'inflexion, soit 37 conditions linéaires.

M. Godeaux : *Sur les transformations birationnelles non périodiques des surfaces algébriques.*

M. Enriques a démontré que si une surface algébrique admet une transformation birationnelle non périodique en elle-même, elle possède un faisceau de courbes elliptiques ou elle est de genres un ($p_a = P_g = 1$). Dans ce dernier cas, l'auteur démontre que la surface possède une involution cyclique ou qu'elle est l'image d'une involution d'ordre 2 existant sur une surface de genres un.

M. Fouché : *Sur la géométrie élémentaire.*

SÉANCE DU 24 DÉCEMBRE 1916.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. Robinson, présenté par MM. Hadamard et Montel.

Communications :

M. Fouché : *Sur la droite de Simson.*

M. L.-B. Robinson : *Sur un système complet de covariants.*

Dans l'*American Journal of Mathematics*, t. XXI, M. Bouton, en se servant de la méthode de Lie, obtient un système complet de covariants ⁽¹⁾ de l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n réduite à la forme canonique Laguerre-Forsyth.

Mais, en formant les transformations infinitésimales des coefficients, il divise l'équation transformée par le coefficient du premier terme, c'est-à-dire par le coefficient de $Y^{(n)}$ et, par conséquent, il obtient des covariants non analogues à ceux de la forme algébrique. Les

⁽¹⁾ Dans cet article, le terme covariant renferme invariant comme cas spécial.

transformations mentionnées ci-dessus sont données par les formules

$$\frac{\partial a_i^{(k)}}{\partial t} = -(i+k)\zeta' a_i^{(k)} - \frac{1}{2} [k(k+2i-1)a_i^{(k-1)} + i(i-1)a_{i-1}^{(k)}]\zeta''.$$

L'auteur a obtenu un système complet de covariants sans avoir fait la division mentionnée ci-dessus et par conséquent les transformations infinitésimales sont données par les formules

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i^{(k)}}{\partial t} = & -\varepsilon a_i^{(k)} - \left[(i+k)a_i^{(k)} - \frac{n+1}{2} a_i^{(k)} \right] \zeta' \\ & - \frac{1}{2} [k(k+2i-1)a_i^{(k-1)} - k(n+1)a_i^{(k-1)} + i(i-1)a_{i-1}^{(k)}]\zeta''. \end{aligned}$$

$a_i^{(k)}$ a le poids $(-n+i+k)$.

$Y^{(k)}$ a le poids k .

On voit immédiatement que les covariants sont définis par le système d'équations

$$\begin{aligned} X_1 f &\equiv \sum_0^{n-1} k Y^{(k)} \frac{\partial f}{\partial Y^{(k)}} - \sum_0^{w-j} k \sum_3^n j a_j^{(k)} \frac{\partial f}{\partial a_j^{(k)}} - \sum_0^w k a_0^{(k)} \frac{\partial f}{\partial a_0^{(k)}} = \lambda_1 f, \\ X_2 f &\equiv \sum_1^{n-1} k k Y^{(k)} \frac{\partial f}{\partial Y^{(k)}} + \sum_0^{w-j} k \sum_3^n j(j+k-n) a_j^{(k)} \frac{\partial f}{\partial a_j^{(k)}} \\ &\quad + \sum_0^w k(k-n) a_0^{(k)} \frac{\partial f}{\partial a_0^{(k)}} = \lambda_2 f, \\ (S) \quad X_3 f &\equiv \sum_1^{n-1} k k(n-k) Y^{(k-1)} \frac{\partial f}{\partial Y^{(k)}} \\ &\quad - \sum_1^{w-j} k \sum_3^n j k(k+2j-n-2) a_j^{(k-1)} \frac{\partial f}{\partial a_j^{(k)}} \\ &\quad - \sum_1^{w-j} k \sum_4^n j j(j-1) a_{j-1}^{(k)} \frac{\partial f}{\partial a_j^{(k)}} \\ &\quad - \sum_1^w k k(k-n-2) a_0^{(k-1)} \frac{\partial f}{\partial a_0^{(k)}} = 0, \end{aligned}$$

λ_1 et λ_2 sont des nombres constants à déterminer par le poids des covariants cherchés.

On saura résoudre l'équation $X_3 f = 0$ de proche en proche en uti-

lisant le procédé de la séparation des variables. En général, on saura abréger ce procédé en se rappelant le théorème suivant :

En différentiant un covariant absolu on obtiendra un covariant relatif d'ordre un.

Car en nous appuyant sur ce théorème nous verrons qu'il suffit de résoudre

$$X_1 f = X_2 f = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k k (n-k) Y^{(k-1)} \frac{\partial f}{\partial Y^{(k)}} - \sum_{k=1}^{w-3} k k (k-n+1) a_3^{(k-1)} \frac{\partial f}{\partial a_3^{(k)}} \\ - \sum_{j=1}^n j j (j-1) a_{j-1} \frac{\partial f}{\partial a_j} - \sum_{k=1}^w k k (k-n-2) a_0^{(k-1)} \frac{\partial f}{\partial a_0^{(k)}} = 0$$

Lorsqu'on a obtenu toutes les solutions de $X_3 f = 0$, les solutions du système (S) s'obtiendront en tenant compte des considérations suivantes :

- 1° Toute fonction qui a le poids λ_2 satisfait à l'équation $X_2 f = \lambda_2 f$.
- 2° Toute fonction de degré r par rapport aux $a_j^{(k)}$ et de degré $\lambda_1 + r$ par rapport aux $Y^{(k)}$, où r est parfaitement arbitraire, satisfait à l'équation $X_1 f = \lambda_1 f$.

Si nous voulons calculer les invariants absolus, il nous faut intégrer le système

$$X_1 f = X_2 f = X_3 f = 0.$$

Il est évident que les covariants identiques s'identifient avec ceux de Bouton.

Les covariants mêlés peuvent s'écrire

$$C_1 \equiv Y^{n-2n} a_3^2; (n-2) Y'^2 - (n-1) Y Y''; {}^{n-3}, \\ C_2 \equiv Y^{1-n} a_3^{4-n}; [6 - (n-1)] a_3 Y' + (n-1) a_3' Y; {}^{n-3}, \\ C_3 \equiv Y^2 a_3^{8-2n}; [14 + (n+1)] a_3'^2 - 2[6 - (n+1)] a_3 a_3''; {}^{n-3}.$$

Il faut ajouter que le nouveau système de covariants ne peut pas s'identifier avec le système calculé par Bouton, même si l'on écrit $p_0 = 1$.

RAPPORT DE LA COMMISSION DES COMPTES.

(MM. G. FOURET, G. HUMBERT; CH. BIOCHE, rapporteur.)

Le trésorier de la Société, M. Servant, a été mobilisé. La difficulté d'établir des comptes précis par suite du départ précipité de notre trésorier sur le front et diverses autres circonstances ont empêché la présentation d'un rapport à la date indiquée par les statuts. Celui-ci établit la situation au 31 mars 1917.

M. Cahen, archiviste de la Société, a bien voulu accepter de suppléer notre trésorier absent, avec l'aide de notre agent, M. Vézinaud. Il y a lieu de remercier tout particulièrement M. Cahen et M. Vézinaud dont la tâche est singulièrement compliquée, et qui assurent le fonctionnement de la Société au point de vue financier.

Les cotisations rentrent difficilement pour diverses raisons, difficultés des communications, mobilisation d'un certain nombre de nos collègues, etc. Quelques-uns des membres de la Société se refusent catégoriquement à payer leurs cotisations pendant la guerre. Néanmoins, grâce à ses réserves, la Société peut faire face à ses dépenses et assurer la publication de son *Bulletin*.

Ce Rapport, n'ayant pu être présenté à l'Assemblée générale, ne peut être considéré que comme provisoire. Il y a lieu d'espérer qu'à la prochaine Assemblée générale, la situation financière pour l'exercice courant pourra être établie conformément aux statuts.

CH. BIOCHE.

État des recettes et des dépenses courantes.

Solde actif au 31 octobre 1913.....	fr 2009,42
-------------------------------------	---------------

Recettes.

Cotisations.....	6940,40
Abonnements, vente de volumes.....	2363,30
Subvention du Ministère.....	1400,00
Intérêts de bons de la défense nationale.....	60,00
Total de l'actif.....	<u>12773,12</u>

Dépenses.

<i>Bulletin</i> (T. XLII).....	fr 4620,83
Tirages à part.....	250,20
<i>Bulletin</i> (T. XLIII).....	4088,40
Tirages à part.....	381,25
Traitement de l'agent, gratifications.....	1487,00
Poste et divers.....	815,75
Souscriptions à des Sociétés (Amis des Sciences, employés de la Sorbonne).....	105,00
Souscription aux œuvres d'Euler.....	26,00
Traduction	300,00
Total des dépenses	<u>12074,43</u>
Excédent des recettes.....	698,69
Total comme ci-dessus....	<u><u>12773,12</u></u>

En portefeuille :

1^{re} Réserve inaliénable (titres nominatifs) :

- 886^{fr} de rente 3 pour 100;
- 3 obligations Ouest 3 pour 100;
- 2 obligations des Chemins de fer du Sud;

2^{de} Réserve disponible (titres au porteur) :

- 348^{fr} de rente 3 pour 100;
- 565^{fr} de rente 5 pour 100 1915;
- 60^{fr} de rente 5 pour 100 1916.



TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
État de la Société au début de 1916.....	1
Liste des périodiques reçus.....	12
Notice sur Charles Halphen.....	14
Notice sur Jean Clairin.....	15
Comptes rendus des séances.....	17
Communications : MM. Bioche : Sur une cubique plane remarquable.....	31
Cahen : Sur un théorème d'arithmétique.....	29
Fontené : Sur une extension des polygones de Poncelet.....	17
— Sur le cercle de Joachimsthal.....	28
Fouché : Sur l'homographie.....	27
— Sur certains cercles des neuf points.....	29
— Sur la transformation de Lie.....	29
— Sur une solution par récurrence de l'équation de Pell.....	31
— Sur la géométrie élémentaire.....	32
— Sur la droite de Simson.....	32
Godeaux : Sur les transformations birationnelles non périodiques des sur- faces algébriques.....	32
Kiveliovitchi : Sur une méthode de résolution de l'équation $6x^2 + 1 = y^2$...	30
Kostitzin : Sur la résolution de l'équation $ax^2 + 1 = y^2$	31
Montel : Sur une définition qualitative des cercles osculateurs et des lignes de courbure.....	27
Robinson : Sur un système complet de covariants.....	32
Rapport de la Commission des comptes.....	35

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie},

58384 Quai des Grands-Augustins, 55.

QA

1

S59

t.44

Physical &
Applied Sci.
Serials

Société mathématique de
France, Paris
Bulletin

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

